

УДК 531.383

В.О.АПОСТОЛЮК, аспірант, Нац. техн. ун-т (КПІ),

О.В.ЗБРУЦЬКИЙ, д-р техн. наук, проф., Нац. техн. ун-т (КПІ),

ПЕРЕХРЕСНА ЧУТЛИВІСТЬ МІКРОМЕХАНІЧНОГО ВІБРАЦІЙНОГО ГІРОСКОПА

У статті розглядаються різноманітні помилки у вимірюванні переносної кутової швидкості за допомогою мікромеханічного вібраційного гіроскопа. Досліджена перехресна чутливість мікромеханічного вібраційного гіроскопа, як причина виникнення деяких похибок. Знайдені формули для їх обчислення. Здобута діаграма перехресної чутливості для чутливого елементу гіроскопа. Запропоновані методи зменшення цих помилок за допомогою оптимізації конструктивних параметрів чутливого елементу. Здобуті формули для аналітичного розрахунку необхідних оптимальних параметрів.

Підвищення інтересу до мікромеханічних інерціальних датчиків обумовлює, у свою чергу, актуальність побудови та дослідження їхніх докладних математичних моделей. З точки зору повноти розуміння особливостей динаміки карданового мікромеханічного вібраційного гіроскопа, особливий інтерес представляють дослідження перехресної чутливості його чутливого елемента. Конструкція і принцип дії карданового мікромеханічного гіроскопа докладно вивчені у працях [1, 2].

Прийемо, що квазіпостійний вектор переносної кутової швидкості орієнтований у просторі довільним чином, тобто $\vec{\Omega} = \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$.

Поведінка чутливого елемента мікромеханічного вібраційного гіроскопа у цьому випадку описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1 \dot{\alpha} + (k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2)\alpha - g_1\Omega_z \dot{\beta} + d_1\Omega_x\Omega_y\beta = \\ = -d_1\Omega_y\Omega_z, \\ \ddot{\beta} + 2h_2 \dot{\beta} + (k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2)\beta + g_2\Omega_z \dot{\alpha} + d_3\Omega_x\Omega_y\alpha = \\ = m_2(t) + d_2\Omega_x\Omega_z. \end{cases} \quad (1)$$

У системі рівнянь (1) α та β - кути повороту внутрішньої та зовнішньої рамок відповідно; k_j ($j = 1,2$) - парціальні частоти внутрішньої та зовнішньої рамок; h_j - коефіцієнти демпфірування; d_j і g_j - постійні коефіцієнти, що визначаються інерційними параметрами конструкції; $m_2(t)$ - момент зовнішніх сил, які викликають вимушені коливання зовнішньої рамки.

Система рівнянь (1) є лінійною. Виходячи з принципу суперпозиції, кінцевий рух внутрішньої рамки буде представлятися у вигляді сукупності рухів системи від кожного з адитивних впливів. Реакцією системи на постійний вплив буде постійне зміщення по кутам відхилення зовнішньої і внутрішньої рамок, що може бути знайдене з системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2)\alpha_0 + d_1\Omega_x\Omega_y\beta_0 = -d_1\Omega_y\Omega_z, \\ d_3\Omega_x\Omega_y\alpha_0 + (k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2)\beta_0 = d_2\Omega_x\Omega_z. \end{cases} \quad (2)$$

Вирішуючи систему (2) щодо постійних кутів повороту внутрішньої рамки α_0 і зовнішньої β_0 , одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{d_1\Omega_y\Omega_z(k_2^2 + d_2\Omega_z^2)}{(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2)(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2) - d_1d_3\Omega_x^2\Omega_y^2}, \\ \beta_0 &= \frac{d_2\Omega_x\Omega_z(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 + d_1\Omega_y^2(d_3 - d_2)/d_2)}{(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2)(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2) - d_1d_3\Omega_x^2\Omega_y^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, що постійна складова може бути легко виключена з вихідного сигналу шляхом фільтрації на частоті збудження. Відкидаючи постійний вплив, перетворюємо систему (1) до виду

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1\dot{\alpha} + (k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2)\alpha - g_1\Omega_z\dot{\beta} + d_1\Omega_x\Omega_y\beta = 0, \\ \ddot{\beta} + 2h_2\dot{\beta} + (k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2)\beta + g_2\Omega_z\dot{\alpha} + d_3\Omega_x\Omega_y\alpha = m_2(t). \end{cases} \quad (4)$$

Коливання зовнішньої і внутрішньої рамок, відповідні до часткового рішення системи неоднорідних диференціальних рівнянь при гармонійному збудженні, представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \text{Re}\{\bar{A}e^{i\omega t}\}, \quad \bar{A} = Ae^{i\varphi_1}, \\ \beta(t) &= \text{Re}\{\bar{B}e^{i\omega t}\}, \quad \bar{B} = Be^{i\varphi_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

де A і B - амплітуди кутових коливань внутрішньої та зовнішньої рамок відповідно, а φ_1 і φ_2 - їхні фази.

Вихідним сигналом системи є коливання внутрішньої рамки, пропорційні до переносної кутової швидкості, що вимірюється. При довільній орієнтації вектора переносної кутової швидкості, одержуємо наступну амплітуду коливань внутрішньої рамки чутливого елемента:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(g_1^2\omega^2\Omega_z^2 + d_1^2\Omega_x^2\Omega_y^2)/\Delta^2}, \\ \Delta^2 &= [(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2)(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2 - \omega^2) - \\ &- 4h_1h_2\omega^2 - (g_1g_2\omega^2\Omega_z^2 + d_1d_3\Omega_x^2\Omega_y^2)]^2 + \\ &+ 4\omega^2[h_1(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2 - \omega^2) + \\ &+ h_2(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2)]^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Виділимо в отриманому виразі (6) корисну та шкідливу складові:

$$A \approx A_{(z)} + A_{(xy)} \quad (7)$$

Корисною будемо вважати частину амплітуди $A_{(z)}$, яка залежить від переносної кутової швидкості Ω_z , перпендикулярної до площини приладу. Чутливість по іншим напрямкам, наведену як частина $A_{(xy)}$, будемо вважати шкідливою.

Після використання ряду Тейлора для близького розкладання радикала і підстановки його до виразу (6), отримуємо формули для зазначених вище складових (7):

$$\begin{aligned} A_{(z)} &= \frac{g_1 \omega \Omega_z}{\sqrt{\Delta^2}}, \\ A_{(xy)} &= \frac{d_1^2 \Omega_x^2 \Omega_y^2}{2g_1 \omega \Omega_z \sqrt{\Delta^2}}, (\Omega_z \neq 0) \\ A_{(xy)} &= \frac{d_1 \Omega_x \Omega_y}{\sqrt{\Delta_0^2}}, (\Omega_z = 0) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 &= \left[(k_1^2 - d_1 \Omega_y^2 - \omega^2) (k_2^2 - d_2 \Omega_x^2 - \omega^2) - 4h_1 h_2 \omega^2 - \right. \\ &\quad \left. - d_1 d_3 \Omega_x^2 \Omega_y^2 \right]^2 + 4\omega^2 \left[h_1 (k_2^2 - d_2 \Omega_x^2 - \omega^2) + h_2 (k_1^2 - d_1 \Omega_y^2 - \omega^2) \right]^2. \end{aligned}$$

Отримані вирази (8) дозволяють оцінити помилки виміру перпендикулярної до площини приладу складової вектора переносної кутової швидкості, що довільно орієнтована в інерціальному просторі.

Побудуємо діаграму перехресної чутливості карданової схеми побудови мікромеханічного вібраційного гіроскопа. Для цього покладемо, що вектор переносної кутової швидкості лежить у площині приладу XY і є одиничним по величині. Представляючи його проекції на осі X і Y у полярній системі координат, змінюючи полярний кут від 0 до 360° і відкладаючи по напрямку полярного радіусу величину $A_{(xy)}$ - шкідливої складової амплітуди коливань внутрішньої рамки чутливого елемента, одержуємо діаграму перехресної чутливості, наведену на рис.1.

Аналізуючи отриману діаграму бачимо, що максимальною шкідлива складова від перехресної чутливості буде у випадку, коли проекція вектору переносної кутової швидкості на площину чутливого елемента буде направлена вздовж бісектрис координатних кутів.

Розглянемо тепер шлях усунення небажаної перехресної чутливості карданового мікромеханічного гіроскопа.

В наведеній вище системі диференціальних рівнянь (1) та її розв'язаннях, що описують небажану перехресну чутливість карданового мікромеханічного вібраційного гіроскопа, присутні постійні коефіцієнти, які залежать тільки від параметрів конструкції. Це дає нам можливість вибирати ті або інші геометричні співвідношення у конструкції чутливого елемента з точки зору запобігання небажаних властивостей його динаміки.

Найбільш цікавими з цієї точки зору представляються

g_1, g_2 - коефіцієнти при гіроскопічному перехресному зв'язку,

d_1, d_2, d_3 - коефіцієнти при складових, що визначають похибки гіроскопа.

Слідусь відзначити, що коефіцієнти d_1 і d_2 відповідають за наявність у диференціальних рівняннях квадрата переносної кутової швидкості, що тягне за собою очевидне зниження діапазону її лінійного виміру. Окрім цього, коефіцієнти d_1 і d_3 характеризують перехресну чутливість гіроскопа.

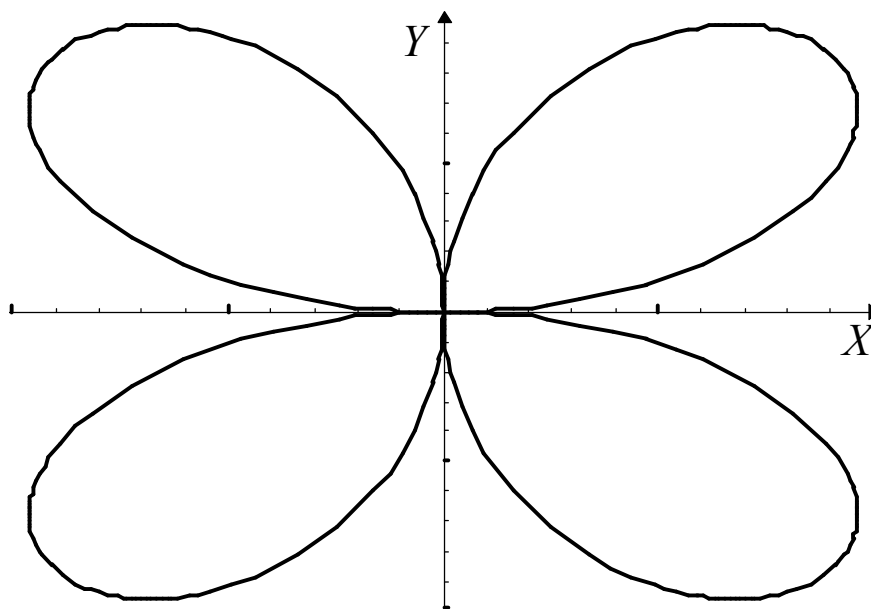


Рис. 1.

Виходячи з наведених вище міркувань, можемо сформулювати наступні вимоги до оптимізації конструктивних параметрів карданової схеми мікромеханічного вібраційного гіроскопа:

$$\begin{aligned} g_i &\rightarrow \max, (i = 1, 2), \\ d_j &\rightarrow 0, (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (9)$$

З урахуванням введених у [2] позначок, перепишемо умови (9) у вигляді

$$\begin{aligned} G &= I_{x2} + I_{y2} - I_{z2} \rightarrow \max, \\ D_1 &= I_{z2} - I_{y2} \rightarrow 0, \\ D_2 &= I_{z1} + I_{z2} - I_{x1} - I_{x2} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (10)$$

де I_{xj}, I_{yj} і I_{zj} ($j = 1, 2$) - моменти інерції внутрішньої і зовнішньої рамок відповідно.

Вирази (10) є одними з можливих умов оптимізації параметрів конструкції чутливого елемента мікромеханічного вібраційного гіроскопа. Розроблені обчислювальні програми для персонального комп'ютера дозволяють чисельно варіювати будь-які розміри чутливого елемента, і в автоматичному режимі проводити їхній вибір з точки зору задоволення отриманим умовам оптимізації (10). Однак найбільш зручною представляється оптимізація шляхом вибору розмірів інерційної маси, розміщеної на внутрішній рамці чутливого елемента. Це зумовлюється тим, що згідно технологіям, що використовуються у цей час, інерційна маса, що має форму

паралелепіеда, виготовляється окремо від іншої конструкції чутливого елемента гіроскопа. У цьому випадку оптимізацію системи можна проводити без внесення змін в основний технологічний процес виготовлення пружного підвісу.

Отримаємо аналітичні вирази, що дозволять обчислювати розміри інерційної маси, які задовольняють умовам (10). Вирази для моментів інерції внутрішньої рамки, як функції розмірів інерційної маси, мають вигляд:

$$\begin{aligned} I_{x2} &= I_{x20} + \frac{\rho X_m Y_m Z_m}{12} (Y_m^2 + 4Z_m^2), \\ I_{y2} &= I_{y20} + \frac{\rho X_m Y_m Z_m}{12} (X_m^2 + 4Z_m^2), \\ I_{z2} &= I_{z20} + \frac{\rho X_m Y_m Z_m}{12} (X_m^2 + Y_m^2), \end{aligned} \quad (11)$$

де X_m , Y_m , Z_m - розміри інерційної маси у напрямку відповідних осей; ρ - густина матеріалу маси; I_{x20} , I_{y20} , I_{z20} - моменти інерції внутрішньої рамки без урахування інерційної маси.

З урахуванням (11), вираження для збільшуемого коефіцієнта гіроскопічного перехресного зв'язку G і зменшуемого коефіцієнта D_1 можуть бути записані наступним чином:

$$\begin{aligned} G &= G_0 + \frac{2}{3} \rho X_m Y_m Z_m^3, \\ D_1 &= D_{10} + \frac{\rho}{12} X_m (Y_m^3 Z_m - 4Z_m^3 Y_m), \end{aligned} \quad (12)$$

де $G_0 = I_{x20} + I_{y20} - I_{z20}$, $D_{10} = I_{z20} - I_{y20}$ - значення відповідних коефіцієнтів без врахування інерційної маси.

Аналізуючи отримані вирази (12), можна зробити очевидний висновок, що коефіцієнт гіроскопічної чутливості системи зростає пропорційно третього ступеня лінійного розміру інерційної маси у напрямку осі Z . З іншого боку, збільшення цього лінійного розміру інерційної маси має чисто технологічні обмеження. З цього слідує, що лінійний розмір інерційної маси у напрямку осі Z необхідно вибирати максимально можливим з урахуванням технології виготовлення. Подальшу оптимізацію будемо проводити, варіюючи лінійні розміри інерційної маси у напрямку інших осей X і Y .

Прирівнюючи нулю вираз для коефіцієнта D_1 , з (12) одержуємо рівняння для знаходження оптимальних розмірів інерційної маси:

$$X_m (Y_m^3 Z_m - 4Z_m^3 Y_m) + \frac{12D_{10}}{\rho} = 0. \quad (13)$$

Рівняння (13) являє собою нелінійне алгебраїчне рівняння відносно трьох змінних - розмірів інерційної маси. Рішення рівняння (13) можуть бути знайдені чисельно за допомогою прямого перерахування всіх допустимих значень змінних. Діапазони варіювання розмірів інерційної маси обмежуються технологічними і конструктивними особливостями мікромеханічного вібраційного гіроскопу. Максимальні значення розмірів X_m і Y_m визначаються відповідними розмірами внутрішньої рамки гіроскопу, а висота маси Z_m - технологією її виготовлення. З іншого боку, згідно вираженню для

G (12), підвищення гіроскопічної чутливості вимагає збільшення розмірів інерційної маси.

Наведені вище міркування, дозволяють знайти рішення рівняння (13) за умови фіксації одного або декількох розмірів маси максимально можливим значенням з точки зору конкретної конструктивної або технологічної реалізації. Розмір Z_m інерційної маси слідє вибрати настільки великим, наскільки це дозволяє зробити технологія її виготовлення. Інші розміри ми можемо варіювати в межах, зумовленими конструкцією внутрішньої рамки.

Якщо конструкція внутрішньої рамки дозволяє виготовити інерційну масу з розміром $Y_m > X_m$, то вибираючи фіксованими максимально можливі значення для розмірів $Y_m = Y_{m0}$ і $Z_m = Z_{m0}$, можемо записати формулу для обчислювання оптимального розміру інерційної маси у напрямку осі X :

$$X_m = \frac{12D_{10}}{\rho(4Z_{m0}^3 Y_{m0} - Y_{m0}^3 Z_{m0})}. \quad (14)$$

Якщо конструкція внутрішньої рамки дозволяє виготовляти інерційну масу з розміром $X_m > Y_m$, то фіксуємо розміри $Z_m = Z_{m0}$ і $X_m = X_{m0}$, розмір Y_m знаходимо як рішення рівняння

$$D_1 = Y_m^3 Z_{m0} - 4Z_{m0}^3 Y_m + \frac{12D_{10}}{\rho X_{m0}} = 0. \quad (15)$$

Оптимальним розміром інерційної маси у напрямку осі Y , буде максимальне позитивне рішення рівняння (15). Графік на рис. 2 демонструє взаємне розташування невід’ємних коренів рівняння (15).

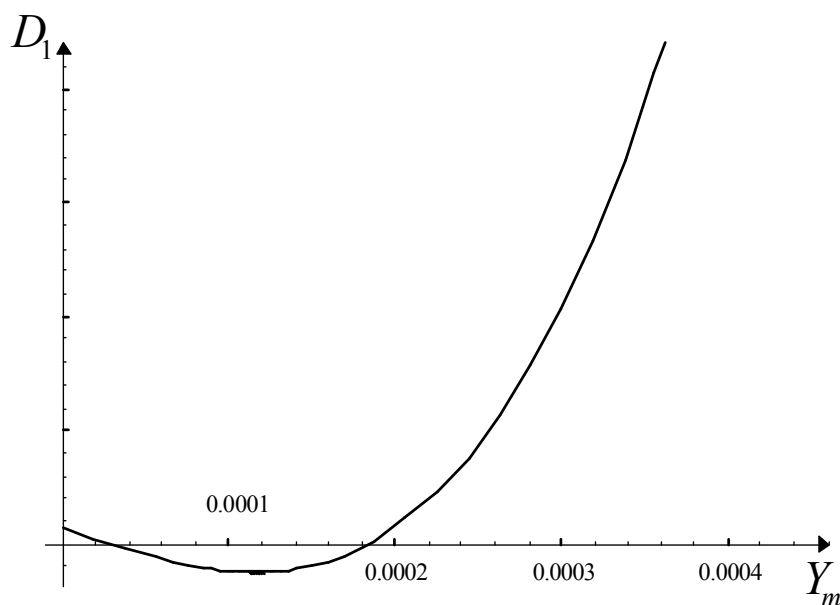


Рис. 2.

Корені рівняння (15), знайдені за допомогою формул Кардано, мають вигляд:

$$\begin{aligned} Y_m^{(1)} &= 4pZ_{m0}^2 + \frac{1}{3p}, \\ Y_m^{(2)} &= -2p(1+i\sqrt{3})Z_{m0}^2 - \frac{1-i\sqrt{3}}{6p}, \\ Y_m^{(3)} &= -2p(1-i\sqrt{3})Z_{m0}^2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{6p}, \end{aligned} \quad (16)$$

де $p = \left(2^{1/3} \rho X_{m0} Z_{m0}\right) / \left[\rho^2 X_{m0}^2 Z_{m0}^2 \left(\sqrt{104976D_{10}^2 - 6912\rho^2 X_{m0}^2 Z_{m0}^8} - 324D_{10}\right)\right]^{1/3}$.

Виготовлення інерційної маси чутливого елемента мікромеханічного вібраційного гіроскопа по оптимальним розмірам, які можна легко обчислити за допомогою формул (14) і (16), дозволяє, як мінімум, зробити несуттєвою перехресну чутливість системи та збільшити діапазон лінійності виміру переносної кутової швидкості. Величина перехресної чутливості і напрямок її максимуму можуть бути оцінені за допомогою отриманих співвідношень (8) та діаграми на мал.2 відповідно.

Список використаної літератури

1. Voxenhorn B. *Planar inertial sensor*. The Charles Stark Draper Laboratory, Inc., Cambridge, Mass., U. S. Patent N 4598585. Заявл. 19.03. 84., опубл. 8.07. 86.
2. Апостолук В. А., Збруцкий А. В. *Исследование микромеханических инерциальных датчиков*. 4-ая Санкт.-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. 1997.