

## ПРИЛАДОБУДУВАННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 681.513

О.С. Апостолук, В.О. Апостолук

### ДО ПЕРЕХОДУ ВІД ДИСКРЕТНИХ ДО НЕ- ПЕРЕРВНИХ ПОЛЮСІВ ЛІНІЙНОЇ ІНВА- РІАНТНОЇ В ЧАСІ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА МЕТОДОМ ПРОНІ

#### Вступ

Знаходження полюсів передавальної функції лінійної інваріантної в часі динамічної системи за її дискретним відліком, отриманим у результаті експериментального дослідження, завжди пов'язане з вибором кроку дискретності часу. При великому кроці існує загроза втрати частотної інформації, що міститься у вихідному сигналі. Якщо ж намагатися вибирати цей крок якнайменшим, то, по-перше, істотно зросте обсяг вибірки, а по-друге, збільшиться величина взаємно кореляційної похибки. Отже, є необхідність вибору оптимального кроку дискретності часу. При цьому кожна частотна складова сигналу матиме свій оптимальний крок. У випадку, коли сигнал є реакцією деякої лінійної інваріантної системи на збудження у вигляді одиничного імпульсу (імпульсної перехідної функції) або одиничної сходинки (перехідної функції), то частотне наповнення сигналу визначається полюсами передавальної функції такої системи. Знайшовши ці полюси, можна ідентифікувати передавальну функцію системи, тобто отримати її математичну модель. На жаль, методи ідентифікації таких систем є надзвичайно чутливими до шуму вимірювань, який завжди є в їх вихідних сигналах, а тому розробка методів підвищеної точності актуальна і має наукову і практичну цінність.

Заторкнута проблема зустрічається в багатьох випадках, серед яких – обробка сигналів [1], визначення параметрів радіоактивного розпаду [2], ідентифікація параметрів гнучких конструкцій [3] і біологічних систем [4] тощо. Отже, її розв'язання дає можливість більш якісно вирішувати практичні проблеми моделювання в цих галузях.

Вперше звернув увагу на проблеми, пов'язані з інтерполяцією і екстраполяцією дискретних даних за допомогою суми комплексних експонент, а отже, й з ідентифікацією неперервної системи за дискретними даними, фран-

цузький вчений Гаспар Ріш (барон де Проні) [5], вивчаючи ефекти тиску пари спирту.

#### Постановка задачі

Метою даної статті є вдосконалення процедури ідентифікації систем з одним входом і одним виходом (SISO-системи) за допомогою розробки в межах поліноміального підходу алгоритму підвищення точності визначення дискретних полюсів  $\theta_i$  і мінімізацію похибок, пов'язаних із переходом від  $\theta_i$  до неперервних полюсів  $\mu_i$ .

#### Сортування матриці дискретних полюсів і похибок вимірювань

Розглядається лінійна інваріантна в часі динамічна SISO-система, передавальна функція якої має вигляд

$$H(s) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i s^{m-i}}{s^m + \sum_{i=1}^m a_i s^{m-i}}. \quad (1)$$

Якщо полюси  $\mu_i$  (нулі знаменника) передавальної функції різні (а досліджується саме цей випадок), то вона може бути подана у вигляді

$$H(s) = \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{s - \mu_i}. \quad (2)$$

За нульових початкових умов і сигналу  $u(t) = \delta(t)$  на вході системи ( $\delta(t)$  – дельта-функція Дірака) вихідний сигнал (імпульсна перехідна функція) матиме вигляд

$$y(t) = \sum_{i=1}^m r_i \exp(\mu_i t).$$

Нехай тепер  $y(t)$  реєструється через однакові проміжки часу  $T$ , тобто є відомою послідовність  $\{y(n)\}$ :

$$y(n) = y(nT) = \sum_{i=1}^m r_i \exp(\mu_i nT),$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

Маючи цю послідовність вимірювань, слід розв'язати задачу ідентифікації, тобто визначи-

ти  $r_i$  і  $\mu_i$ . Далі, згідно з (2), можна знайти передавальну функцію  $H(s)$ .

Звернемо увагу на те, що елементи послідовності (3) лінійно залежать від констант  $r_i$ . Отже, визначення  $r_i$  при відомих  $y(n)$  і  $\mu_i$  зводиться до розв'язання перевизначеної системи лінійних рівнянь. Інша, більш трудомістка частина розглядуваної задачі ідентифікації пов'язана із знаходженням  $\mu_i$ -поліусів передавальної функції (1). Для її розв'язання можна використати метод Проні. Для цього позначимо  $\theta_i = \exp(\mu_i T)$ . Якщо  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) є коренями рівняння

$$\theta^m + \alpha_1 \theta^{m-1} + \dots + \alpha_m = 0, \quad (4)$$

то, очевидно, що за будь-яких  $r_i$  елементи послідовності (3) задовольнятимуть співвідношення

$$y(m) + \alpha_1 y(m-1) + \dots + \alpha_m y(0) = 0. \quad (5)$$

Корені  $\theta_i$  рівняння (4) є полюсами передавальної функції відповідної дискретної системи, тобто дискретними полюсами  $\theta_i$ .

Аналогічне (5) співвідношення можна отримати і у випадку, коли за початковий береться відлік із номером  $v$ :

$$y(m+v) + \alpha_1 y(m-1+v) + \dots + \alpha_m y(v) = 0. \quad (6)$$

За допомогою останнього співвідношення можна сформулювати з елементів послідовності (3) систему лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів  $\alpha_i$  (див., наприклад, [2, 3]):

$$\begin{aligned} & y(m+v) = \\ & = [y(m-1+v) \dots y(v)] [-\alpha_1 \dots -\alpha_m]', \quad (7) \\ & v = 0, 1, \dots, N-m-1. \end{aligned}$$

Таким чином, визначивши із системи (7) коефіцієнти  $\alpha_i$  полінома (6), можна знайти  $\theta_i$ -корені цього полінома і полюси  $\mu_i$ :

$$\mu_i = \frac{1}{T} \ln \theta_i. \quad (8)$$

Отже, згідно з методом Проні, задача визначення полюсів передавальної функції (1) зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь (7), знаходження коренів полінома (4) і обчислення  $\mu_i$  за формулою (8). Такий підхід

дістав у літературі назву поліноміального. Подальша задача отримання передавальної функції при відомих  $\mu_i$  розв'язується за допомогою алгоритму, наведеного в [6]. Слід зауважити, що обчислювальний алгоритм визначення  $\theta_i$ , побудований за таким підходом, має високу чутливість до похибок реєстрації елементів послідовності (3) [2, 7]. Крім того, істотним є збільшення похибки, зумовлене нелінійною залежністю (8)  $\mu_i$  від  $\theta_i$  (при переході від дискретної моделі до неперервної [7, 8]).

Більш детально механізм виникнення таких похибок при визначенні  $\theta_i$  і  $\mu_i$  проаналізовано у статті [9], де робиться висновок, що за фіксованої похибки визначення  $\theta_i$  як при  $T \rightarrow 0$ , так і при  $T \rightarrow \infty$  похибка визначення  $\mu_i$  прямує до  $\infty$ , тобто існує таке (оптимальне) значення  $T$ , при якому похибка визначення  $\mu_i$  є мінімальною.

Для підвищення точності визначення  $\mu_i$  у статті [7] було запропоновано змінити співвідношення (4)–(6) таким чином: нехай  $(\theta_i)^k = \theta_{ik} = \exp(\mu_i kT)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (інтервал  $T$  замінено на  $kT$ ). Тоді аналогом рівняння (4), коренями якого є  $\theta_{ik}$ , буде таке рівняння:

$$\theta_k^m + \alpha_{1k} \theta_k^{m-1} + \dots + \alpha_{mk} = 0. \quad (9)$$

Коефіцієнти цього полінома задовольняють співвідношення, аналогічне (5):

$$y(mk) + \alpha_{1k} y[(m-1)k] + \dots + \alpha_{mk} y(0) = 0.$$

Відповідним чином змінюються і співвідношення (7) і (8):

$$\begin{aligned} & y(mk+v) = \\ & = [y((m-1)k+v) \dots y(v)] [-\alpha_{1k} \dots -\alpha_{mk}]', \\ & v = 0, 1, \dots, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\mu_i = \frac{1}{kT} \ln \theta_{ik}. \quad (11)$$

Як відзначено в публікаціях [2, 7, 8, 9], варіюванням параметром  $k$  у співвідношеннях (9)–(11) можна підвищити точність визначення  $\mu_i$ .

Отже, подальше вдосконалення алгоритму ідентифікації має на меті підвищення точності визначення дискретних полюсів  $\theta_i$  і мініміза-

цію похибок, пов'язаних із переходом від  $\theta_i$  до неперервних полюсів  $\mu_i$ .

За допомогою розв'язання характеристичного рівняння (9) визначаються його корені – дискретні полюси  $\theta_i$  і похибки  $\xi_i$ , що відповідають полюсам  $\mu_i$  неперервної системи (неперервним полюсам) [8, 10]. Ці обчислення виконуються при кожному значенні кроку дискретності часу  $k$ : від  $k = 1$  (що відповідає методу Проні) до  $k = k_{\max}$  із використанням стандартної функції *roots* MATLAB. Зазначимо, що ця функція “видає” корені в довільному порядку. Бажаючи зібрати в кожному стовпчику матриці дискретних полюсів всі полюси, які відповідають одному й тому ж полюсу неперервної системи, треба розв'язати задачу сортування.

Основною властивістю матриці дискретних полюсів є те, що кожний її наступний рядок можна отримати, помноживши попередній рядок на перший (яким, до речі, і обмежується метод Проні), тобто другий рядок є “квадратом” першого, третій – “кубом” першого, і, нарешті,  $k$ -й рядок – “ $k$ -м степенем” першого. Ось чому еталон для сортування другого рядка може бути отриманий піднесенням у квадрат елементів першого рядка, для сортування третього – множенням еталонного другого рядка на перший, і так далі аж до  $k_{\max}$ -го рядка. Сортування починається з другого рядка. Елементи поточного рядка впорядковуються за еталонним із дотриманням мінімуму суми модулів різниці дійсних і уявних частин елементів, що порівнюються, вказаних рядків. Таке ж впорядкування здійснюється і в матриці похибок. В результаті цього сортування отримуємо впорядковані в зазначеному вище розумінні матрицю дискретних полюсів  $[\theta]$  і матрицю похибок  $[\xi]$ .

Тепер залишається отримати для кожного стовпчика матриці  $[\theta]$  значення полюса неперервної системи, що відповідають йому.

#### Перехід від дискретних полюсів до неперервних

Для такого переходу передусім визначаються найменші за стовпчиками елементи матриці похибок  $[\xi]$ , а номери відповідних їм рядків заносяться у вектор  $k_{\text{opt}}$ .

Розглянемо тепер, яким чином можна отримати зазначений вище полюс неперервної системи  $\mu$ , маючи стовпчик дискретних полюсів  $\theta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$ ), пов'язаних з  $\mu = \mu^R + j\mu^I$  ( $R(\text{Re})$  – дійсний,  $I(\text{Im})$  – уявний) очевидними співвідношеннями (див. рис. 1, побудований для  $k = 1$ ):

$$\theta_k = \rho_k \exp(j\beta_k),$$

де

$$\rho_k = \exp(\mu^R kT), \quad \beta_k = \mu^I kT, \quad (12)$$

звідки

$$\mu^R = \frac{1}{kT} \ln \rho_k \quad \text{і} \quad \mu^I = \frac{1}{kT} \beta_k.$$

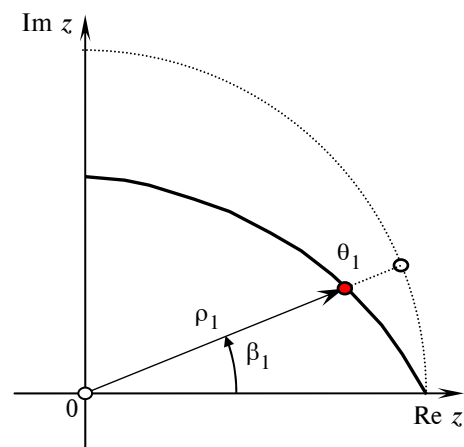


Рис. 1. Дискретний полюс  $\theta_1$  на  $z$ -площині

Зауважимо, що тут і нижче індексом  $i$  стовпчик не позначається, оскільки досліджується один довільний стовпчик.

Якщо вибрати дискретний полюс із найменшою похибкою (для якого вважаємо, що  $k = k_{\text{opt}}$ ), то можна легко знайти дійсну частину  $\mu_{\text{opt}}^R$  оптимального неперервного полюса з такого логарифмічного співвідношення:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{opt}}^R &= \frac{1}{k_{\text{opt}} T} \ln [\text{abs}(\theta_{k_{\text{opt}}})] = \\ &= \frac{1}{2k_{\text{opt}} T} \ln [(\theta_{k_{\text{opt}}}^R)^2 + (\theta_{k_{\text{opt}}}^I)^2]. \end{aligned}$$

Що ж стосується його чисто уявної частини  $\mu_{\text{opt}}^I$ , то її обчислення за формулою

$$\mu_{\text{opt}}^I = \frac{1}{k_{\text{opt}} T} \arg(\theta_{k_{\text{opt}}}) = \frac{1}{k_{\text{opt}} T} \text{Arctg}(\theta_{k_{\text{opt}}}^I / \theta_{k_{\text{opt}}}^R)$$

часто виявляється обтяжливим через неоднозначність функції Arctg. Дослідимо це питання більш детально.

Розглянемо в комплексній  $z$ -площині положення дискретних полюсів  $\theta_k$ , які відповідають одному неперервному полюсу  $\mu$  при  $k = 1, 2, \dots, k_{\text{opt}}, \dots, k_{\text{max}}$  (рис. 2). Відзначимо наявність таких очевидних співвідношень між “абсолютними” і “відносними” кутами ( $\beta_k$  і  $\bar{\beta}_k$ , відповідно):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \bar{\beta}_1, \\ \beta_2 &= 2\bar{\beta}_1, \\ &\dots \\ \beta_{k_{\text{opt}}-1} &= (k_{\text{opt}} - 1)\bar{\beta}_1, \\ \beta_{k_{\text{opt}}} &= k_{\text{opt}}\bar{\beta}_1, \\ &\dots \\ \beta_{k_{\text{max}}} &= k_{\text{max}}\bar{\beta}_1; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1 &= \beta_1, \\ \bar{\beta}_2 &= \beta_2 - \beta_1 = \bar{\beta}_1, \\ \bar{\beta}_3 &= \beta_3 - \beta_2 = \bar{\beta}_1, \\ &\dots \\ \bar{\beta}_{k_{\text{opt}}-1} &= \beta_{k_{\text{opt}}-1} - \beta_{k_{\text{opt}}-2} = \bar{\beta}_1, \\ \bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} &= \beta_{k_{\text{opt}}} - \beta_{k_{\text{opt}}-1} = \bar{\beta}_1, \\ &\dots \\ \bar{\beta}_{k_{\text{max}}} &= \beta_{k_{\text{max}}} - \beta_{k_{\text{max}}-1} = \bar{\beta}_1, \end{aligned} \quad (14)$$

які випливають із формул (12).

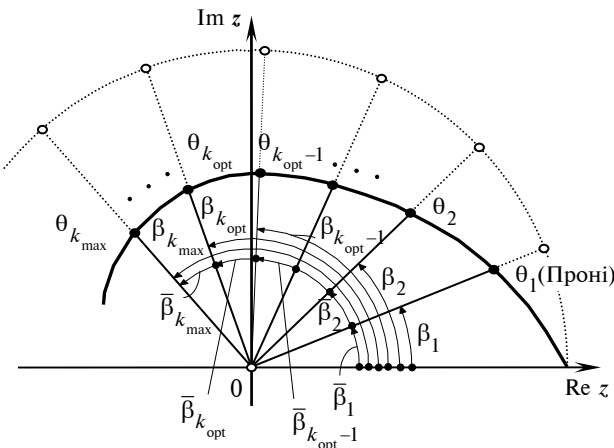


Рис. 2. Положення дискретних полюсів на комплексній площині

Із співвідношень (14) при відсутності похибок вимірювань і шуму в системі маємо

$$\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \dots = \bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} = \dots = \bar{\beta}_{k_{\text{max}}} = \bar{\beta}_1.$$

Виділимо із співвідношень (13) і (14) дві формули, що визначають положення оптимального полюса:

$$\beta_{k_{\text{opt}}} = k_{\text{opt}}\bar{\beta}_1, \quad (15)$$

$$\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} = \beta_{k_{\text{opt}}} - \beta_{k_{\text{opt}}-1} = \bar{\beta}_1. \quad (16)$$

Порівняння двох останніх формул свідчить про те, що похибка у визначенні  $\bar{\beta}_1$  набагато більше впливає на  $\beta_{k_{\text{opt}}}$ , ніж на  $\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}}$  (у першому випадку вона збільшується в  $k_{\text{opt}}$  разів). Це підтверджує необхідність роботи з “відносними” кутами. Крім того, відомо, що головне значення функції арктангенса визначено в межах  $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ . З цього випливає, що найменше значення кута  $\beta_k$ , а саме  $\beta_1$ , не повинно перевищувати  $\frac{\pi}{2}$ , тобто

$$\beta_1 = \mu^I T < \frac{\pi}{2},$$

звідки отримуємо, що

$$\mu^I < \frac{\pi}{2T} = \frac{\omega_N}{2}, \quad (17)$$

де  $\omega_N = \omega_S/2$  – частота Найквіста;  $\omega_S$  – частота вибірки.

Зауважимо, що використання іншої функції арктангенса (atan2 у MATLAB) дозволяє дещо “пом’якшити” обмеження (17) до

$$\mu^I < \frac{\pi}{T} = \omega_N.$$

З проведеного аналізу стає зрозуміло, що для визначення  $\mu^I$  більш прийнятно використовувати формулу (16), а не (15), тобто обчислювати  $\mu^I$  за формулою

$$\mu^I = \frac{1}{T} \bar{\beta}_{k_{\text{opt}}}, \quad (18)$$

використовуючи для знаходження  $\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}}$  такий алгоритм.

1. Визначити  $\bar{\beta}_1 = \beta_1 = \arctg(\theta_1^I/\theta_1^R)$ .

2. "Повернути" координатні осі на кут  $\bar{\beta}_1$  (див. рис. 3).

3. Користуючись матрицею напрямних косинусів між осями вихідної і оберненої систем координат, слід перепроєктувати всі наступні дискретні полюси, включаючи й оптимальний, у обернену систему координат.

4. Повторювати операції п. 1–3 для наступних кутів  $\beta_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) аж до отримання

$$\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} = \arctg(\theta_{k_{\text{opt}}}^I/\theta_{k_{\text{opt}}}^R).$$

Далі можна обчислити  $\mu^I$  за формулою (18).

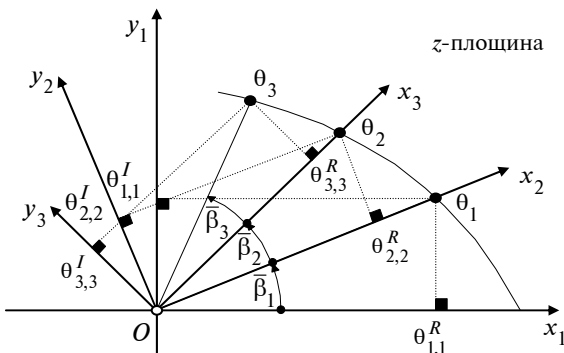


Рис. 3. До алгоритму знаходження  $\bar{\alpha}_{k_{\text{opt}}}$

У випадку, наведеному на рис. 3, маємо

$$k_{\text{opt}} = 3, \bar{\beta}_3 = \arctg\frac{\theta_{3,3}^I}{\theta_{3,3}^R}, \mu^I = \frac{1}{T}\bar{\beta}_3.$$

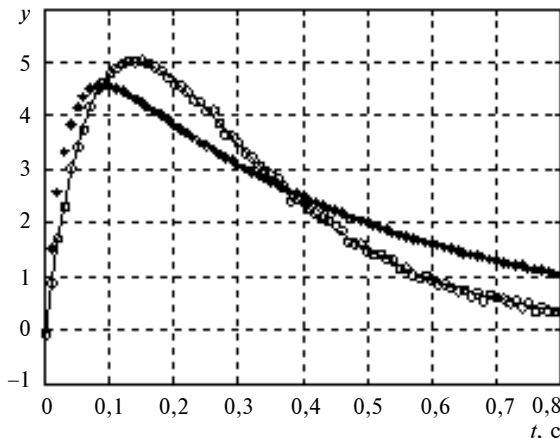


Рис. 4. Результати ідентифікації за методом Проні (одновідсотковий шум)

Цифра після коми в нижньому індексі позначення дискретного полюса означає порядковий номер системи координат.

Оскільки отримане на четвертому кроці значення  $\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}}$  залежить від попереднього неоптимального полюса  $\theta_{k_{\text{opt}}-1}$  за побудовою, то слід використовувати це значення тільки для визначення "накрутки"  $\nu$ , тобто складової кута, кратної  $2\pi$ , за формулою  $\nu = \text{round}\left(\frac{\bar{\beta}_{k_{\text{opt}}} k_{\text{opt}}}{2\pi}\right)$ ,

а саму шукану уявну частину  $\mu^I$  неперервного полюса знаходити за співвідношенням

$$\mu^I = \frac{1}{k_{\text{opt}} T} \left[ \arctg\left(\frac{\theta_{k_{\text{opt}}}^I}{\theta_{k_{\text{opt}}}^R}\right) + \nu 2\pi \right].$$

Зауважимо, що в цьому випадку для обчислення  $\mu^I$  використовується тільки оптимальне значення дискретного полюса, що істотно підвищує точність його обчислення.

За даним алгоритмом автором створено відповідну програму ідентифікації лінійних інваріантних у часі динамічних систем у вигляді *m*-функції MATLAB.

**Приклад.** Розглянемо застосування наведеної методики для ідентифікації лінійної системи другого порядку із сталими коефіцієнтами і великим демпфіруванням, передавальна функція якої має вигляд  $H(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 50}$ . Імпульсну перехідну функцію цієї системи за відсутності шуму вимірювань зображено на рис. 4

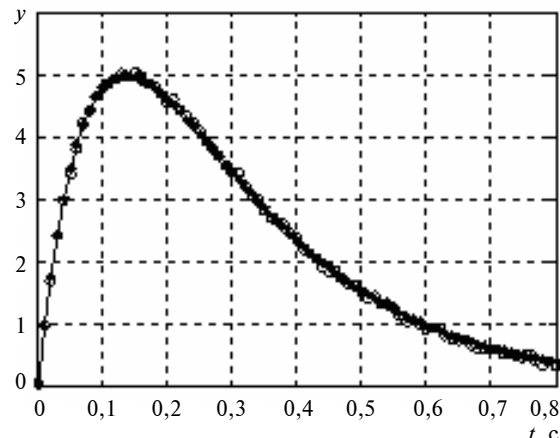


Рис. 5. Результати ідентифікації за запропонованим методом (одновідсотковий шум)

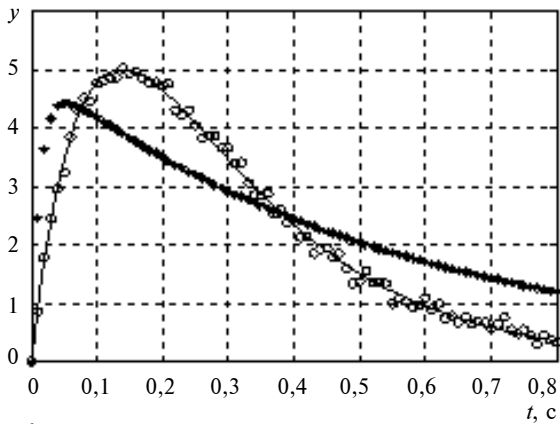


Рис. 6. Результати ідентифікації за методом Проні (двовідсотковий шум)

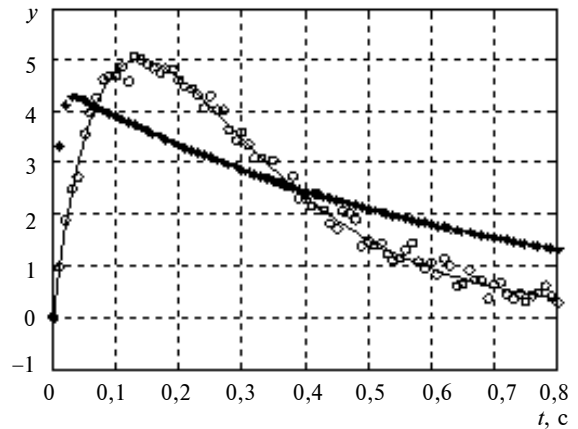


Рис. 8. Результати ідентифікації за методом Проні (тривідсотковий шум)

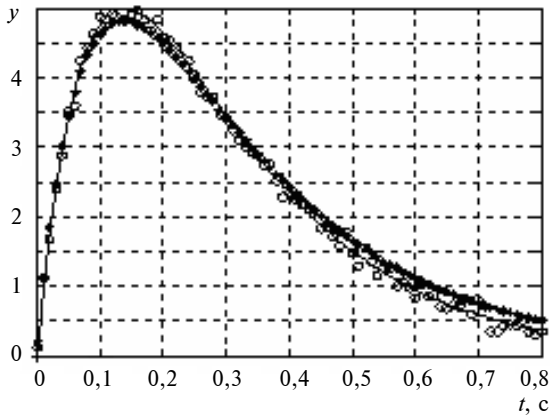


Рис. 7. Результати ідентифікації за запропонованим методом (двовідсотковий шум)

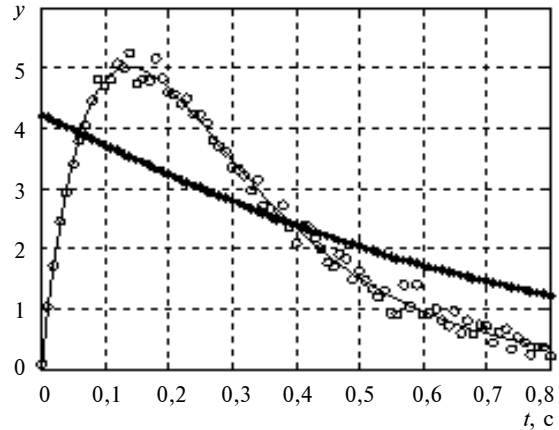


Рис. 9. Результати ідентифікації за запропонованим методом (тривідсотковий шум)

і 5 суцільною лінією ( $n = 100$ ,  $T = 0,01$  с, час спостереження  $T_{\text{сп}} = 0,8$  с), а з одновідсотковим шумом – кружечками. На рис. 4 плюсиками позначено результат ідентифікації за методом Проні, а на рис. 5 – за запропонованим алгоритмом.

Рис. 6 і 7 побудовані за результатами обчислень відповідно з двовідсотковим шумом, а рис. 8 і 9 – з тривідсотковим шумом.

На рис 4–9 по осі абсцис відкладається час у секундах, а по осі ординат – імпульсна перехідна функція системи. Адитивний шум формується за допомогою функції *randn* MATLAB, що видає нормально розподілені випадкові числа, які множаться на відповідний відсоток від максимального значення імпульсної перехідної функції.

### Висновки

Наведені результати дають змогу зробити такі висновки щодо запропонованого покращеного методу Проні порівняно із звичайним методом:

- при відсутності шуму обидва методи дають ідеальні результати;
- при наявності одновідсоткового шуму запропонований метод добре працює на відміну від методу Проні, який за цих умов вже не працює;
- за наявності двовідсоткового шуму запропонований метод ще зберігає свою працездатність;
- якщо рівень шуму перевищує тривідсотковий рівень, то обидва методи стають непрацездатними.

Отже, запропонований метод є перспективним до застосування в зазначених у вступі галузях. Можливим напрямком подальших досліджень наведеного поліноміального методу може бути знаходження безпосереднього впли-

ву коефіцієнтів  $\alpha_{ik}$  полінома (10) на якість апроксимації сигналу на виході системи і створення відповідних алгоритмів.

А.С. Апостолюк, В.А. Апостолюк

К ПЕРЕХОДУ ОТ ДИСКРЕТНЫХ К НЕПРЕРЫВНЫМ ПОЛЮСАМ ЛИНЕЙНОЙ ИНВАРИАНТНОЙ ВО ВРЕМЕНИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО МЕТОДУ ПРОНИ

Рассмотрена линейная инвариантная во времени динамическая система с одним входом и одним выходом, на вход которой подается единичный импульс. Процедура идентификации такой системы, в рамках полиномиального подхода по методу Прони, усовершенствуется за счет повышения точности определения дискретных полюсов системы и минимизации ошибок, связанных с переходом к соответствующим им непрерывным полюсам. Приведен пример применения разработанного алгоритма к идентификации простой динамической системы, показаны его преимущества по сравнению с методом Прони.

O.S. Apostoliuk, V.O. Apostoliuk

TO THE TRANSITION FROM DISCRETE TO CONTINUOUS POLES OF A LINEAR TIME-INVARIANT DYNAMIC SYSTEM BASED ON PRONY'S METHOD

In this paper, we examine the linear time-invariant single-input, single-output dynamic system, subjected to the unit impulse. Specifically, we take the perspective that such system identification procedure in the framework of the Prony's method polynomial approach can be improved through the increased accuracy of discrete system poles determination and errors minimization, connected with the transition to the corresponding continuous poles. Moreover, we provide the example of the algorithm application for the simple dynamic system identification and elucidate its advantages as compared to the Prony's method.

1. Кей С.М., Марпл С.Л. Современные методы спектрального анализа: Обзор // ТИИЭР. — 1981. — 69. — С. 5–51.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961. — 524 с.
3. Moustafa K.A.F. Time-domain structural identification using free response measurements // Int. J. Control. — 1992. — 56, N 1. — P. 51–65.
4. Радченко И.Ф. Аппроксимация дискретной последовательности детерминированной экспоненциальной моделью // Пробл. управления и информатики. — 1994. — № 3-4. — С. 81–86.
5. Prony R. Essai experimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, a différentes températures // J. Es. Polyt. — 1795. — 1. — P. 24–73.
6. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
7. Дейченко Л.В., Ларин В.Б. Про метод найменших квадратів у задачі ідентифікації вібровимірювальних систем // Автоматика. — 1977. — № 3. — С. 15–22.
8. Fassions S.D., Eman K.F., Wu S.M. Sensitivity analysis of the discrete to continuous dynamic system transformation // J. Dynamic System Measurement and Control. — 1990. — 112. — P. 1–9.
9. Ларин В.Б. Об использовании матричных пучков в задаче идентификации // Пробл. управления и информатики. — 1995. — № 3. — С. 32–41.
10. Оптимизация метода Прони при идентификации линейных динамических систем / А.С. Апостолюк, Б.Ф. Бобров, Б.А. Бордюг и др. — К., 1987. — 64 с. (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 87–66).

Рекомендована Радою  
НАЦ критичних технологій  
навігаційного приладобудування  
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції  
4 лютого 2008 року