Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Розв'язування задач на зведення довільної просторової системи сил до найпростішого вигляду за допомогою комп'ютера

Методичні вказівки до виконання практичних занять

Київ-2008

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Розв'язування задач на зведення довільної просторової системи сил до найпростішого вигляду за допомогою комп'ютера

Методичні вказівки
до виконання практичних занять
з теоретичної механіки
для студентів усіх спеціальностей

Затверджено Методичною радою НТУУ «КПІ»

Київ
«ПОЛІТЕХНІКА»
2008

Розв’язування задач на зведення довільної просторової системи сил до найпростішого вигляду за допомогою комп’ютера: [Текст]: метод. вказівки до викон. практ. занять з теоретичної механіки для студ. усіх спец. / Укладачі: О. С. Апостолюк, В. О. Апостолюк. – К.: НТУУ «КПІ», 2008. – 28 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ «КПІ»
(Протокол № 7 від 28.03.2008 р.)

Навчальне видання

Розв’язування задач на зведення довільної просторової системи сил до найпростішого вигляду за допомогою комп’ютера

Методичні вказівки
до виконання практичних занять
з теоретичної механіки
для студентів усіх спеціальностей

Укладачі: *Апостолюк Олександр Семенович*, *Апостолюк Владислав Олександрович*

Відповідальний редактор *В. Г. Савін*, д-р техн. наук, проф.

Рецензент *М. З. Кваско*, канд. техн. наук, проф.

За редакцією укладачів
Надруковано з оригінал-макета замовника

Темплан 2008 р., поз. 2-071

Підп. до друку 15.05.2008. Формат 60×84 $^1\!/_{16}$. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Ум. друк арк. 1,63. Обл.-вид. арк. 2,70. Зам. № 8125. Наклад 50 пр.

НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка»
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15
тел./факс (044) 241-68-78

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Для спрощення аналізу стану і поведінки твердого тіла під дією довільної просторової системи сил треба знати, яким чином можна звести таку систему до найпростішого вигляду. Такий аналіз допомагає встановити подальший рух твердого тіла або його відсутність.

Збірник задач І. В. Мещерського [1] містить низку задач на цю тему (с. 68-72), які мають схожі умови і дають змогу розглянути найпростіші і в той же час найважливіші аспекти такого зведення. В даній роботі наведені аналітичні методи розв'язання наведених прикладів, а також показано, яким чином використовується персональний комп'ютер для розв'язання цих прикладів і остаточного висновку про результати зведення. Наведений алгоритм (методика) розв'язування задач на цю тему, який використаний для відповідного програмування.

Зауважимо, що неможливо у невеликій за обсягом роботі розглянути цю тему надто детально. Більш прискіпливо ця тема та пов'язані із нею питання розглянуті у чисельних літературних джерелах, деякі з яких наведені у списку літератури (див., наприклад, роботи [3 - 11]).

Розглядувана тема міститься майже у всіх курсах теоретичної механіки і є складовою частиною відповідних модулів, які викладаються в НТУУ «Київський політехнічний інститут» (наприклад, НФ-06/1 "Статика. Кінематика" для інженерно-хімічного факультету, НФ-07/1 "Кінематика і початок кінетики" для міжвузівського медико-інженерного факультету, та інших). Даний матеріал займає важливе місце при вивченні дисциплін механічного профілю, та тісно пов'язаний з іншими кредитними модулями робочого навчального плану: прикладною механікою, опором матеріалів, теорією машин і механізмів, деталями машин, гідродинаміка, аеродинамікою, біомеханікою, та іншими.

1. ВСТУП

Однією із важливих задач курсу теоретичної механіки є побудова математичної моделі руху механічного об'єкту[1], що знаходиться під дією прикладеної до нього системи сил і визначення на її основі кінематичного закону його подальшого руху.

На практиці ця задача виникає у тих випадках, коли треба дослідити поведінку існуючого об'єкту або розглянути можливі варіанти руху об'єкту, що проектується.

Для правильної побудови вказаної моделі руху вільного об'єкту бажано максимально спростити вихідну систему сил (у найбільш загальному випадку – довільну просторову), тобто звести її до найпростіших силових факторів.

Для невільного об'єкту система сил на основі аксіоми про звільнення від в'язей доповнюється реакціями в'язей, а об'єкт знову вважається вільним. Попередня система сил і реакції в'язей утворюють нову систему сил, яка підлягає спрощенню.

Для (об'єкта у вигляді) матеріальної точки задача зведення системи сил, прикладених до неї, розв'язується за допомогою послідовного додавання сил за правилом паралелограма (це можна робити, оскільки всі сили є прикладеними до однієї точки), в результаті якого отримуємо одну силу – *рівнодійну*, яка дорівнює векторній сумі сил, що додаються, і дія якої на точку еквівалентна дії всієї вихідної системи сил.

Для абсолютно твердого тіла ця задача ускладнюється тією обставиною, що вплив сили на тіло є обумовленим точкою її прикладення (сила описується зв'язаним вектором). Тому, для того щоб використовувати формули і правила операцій над (вільними) векторами,

[1] Таким об'єктом може бути матеріальна точка, система матеріальних точок (СМТ) і абсолютно тверде тіло (як частинний випадок незмінної СМТ).

треба переносити всі сили, прикладені до твердого тіла, до однієї точки (полюса). Але такий переніс змінює стан і рух твердого тіла. Правило коректного (без зміни стану і руху) переносу сили до полюса надає наступна лема.

2. ТЕОРЕТИЧНЕ ПІДҐРУНТЯ

2.1. Лема про паралельний переніс сили

Не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, що прикладена до нього, можна перенести в будь-яку точку тіла паралельно до самої себе, прикладаючи при цьому *приєднану* пару сил.

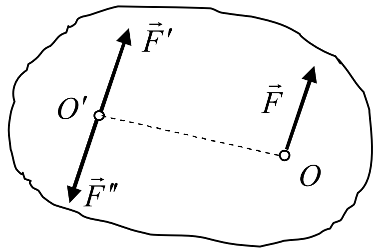

Рис. 1. До леми про паралельний переніс сили

Д о в е д е н н я

Нехай сила $\vec{F}$ прикладена в т. O, і її треба перенести в т. O' (див. рис. 1).

Додаючи в т. O' зрівноважену систему сил $\{\vec{F}', \vec{F}''\} \sim 0$, тобто $F' = F'' = F$, отримаємо еквівалентну початковій силі $\vec{F}$ систему сил $\{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}$, а саме $\{\vec{F}\} \sim \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}$.
Остання система сил складається з сили $\vec{F}' = \vec{F}$ і приєднаної пари сил $\{\vec{F}, \vec{F}''\}$, що і треба було довести.

2.2. Головний вектор і головний момент довільної системи сил. Основна теорема статики твердого тіла (теорема Пуансо)

Нагадаємо, що основною задачею статики є визначення умов зведення довільної системи сил до найпростішого вигляду.

Метод Пуансо дозволяє звести довільну систему сил до однієї пари сил і однієї сили.

Введемо спочатку поняття *головного вектора* і *головного моменту.*

Припустимо, що задається довільна система сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^{n}$.

Головним вектором даної системи сил є векторна сума всіх сил, що входять до системи.

Головним моментом даної системи сил відносно т. O (центра зведення) називається векторна сума моментів всіх сил, що входять в дану систему, відносно того ж центра O.

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i , \qquad (3) \qquad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right), \qquad (4)$$

де $\vec{r}_i$ - радіус-вектор, проведений з центру зведення O у точку прикладення сили $\vec{F}_i$ (див. рис. 2).

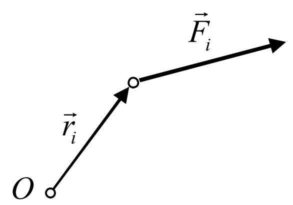

Рис. 2. Радіус-вектор сили

Знайдемо проекції лівої і правої частин (3) і (4) на відповідні осі Ox, Oy і Oz

$$\begin{cases} F_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \\ F_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \\ F_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}; \end{cases} \qquad (5) \qquad \begin{cases} M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right), \\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right), \\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right). \end{cases} \qquad (6)$$

Тут F_{Ox}, F_{oy}, F_{Oz}; M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} - відповідні проекції головного вектора і головного моменту довільної системи сил на осі Ox, Oy і Oz.

Модулі і напрямки головного вектора і головного моменту знайдемо таким чином

$$F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2 + F_{Oz}^2},\quad \begin{cases} \cos\left(\vec{F}_O \hat{;} \vec{i}\right) = \dfrac{F_{Ox}}{F_O}, \\ \cos\left(\vec{F}_O \hat{;} \vec{j}\right) = \dfrac{F_{Oy}}{F_O}, \\ \cos\left(\vec{F}_O \hat{;} \vec{k}\right) = \dfrac{F_{Oz}}{F_O}; \end{cases} \qquad (7)$$

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2},\quad \begin{cases} \cos\left(\vec{M}_O \hat{;} \vec{i}\right) = \dfrac{M_{Ox}}{M_O}, \\ \cos\left(\vec{M}_O \hat{;} \vec{j}\right) = \dfrac{M_{Oy}}{M_O}, \\ \cos\left(\vec{M}_O \hat{;} \vec{k}\right) = \dfrac{M_{Oz}}{M_O}. \end{cases} \qquad (8)$$

Скориставшись наведеною вище лемою, доведемо основну теорему статики – теорему Пуансо.

Теорема Пуансо: *довільна система сил, що діють на тверде тіло, заміню-ється еквівалентною системою, що складається з однієї сили, яка прикладена в довільній точці – центрі зведення і дорівнює головному вектору даної системи сил, і приєднаної пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно вибраного центру зведення.*

Д о в е д е н н я

Нехай маємо довільну систему сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$, прикладених до твердого тіла (рис. 3).

Для кожної сили $\vec{F}_i$ $(i=\overline{1,n})$ в довільному центрі O прикладемо зрівнова-жену систему двох сил $\{\vec{F}_i', \vec{F}_i''\}$, таких, що $F_i' = F_i'' = F_i$, а $\vec{F}_i = \vec{F}_i' = -\vec{F}_i''$.

Тоді сили $\vec{F}_i$ і $\vec{F}_i''$ утворюють приєднану пару сил і маємо $\left\{\vec{F}_i,\vec{F}_i',\vec{F}_i''\right\}\sim\left\{\vec{F}_i',\left\{\vec{F}_i,\vec{F}_i''\right\}\right\}$ (рис. 4).

Приєднану пару сил $\left\{\vec{F}_i,\vec{F}_i''\right\}$ можна характеризувати її моментом $\vec{M}_{\text{пр}}\left(\vec{F}_i,\vec{F}_i''\right)$, тому $\left\{\vec{F}_i,\vec{F}_i',\vec{F}_i''\right\}\sim\left\{\vec{F}_i',\vec{M}\left(\vec{F}_i,\vec{F}_i''\right)\right\}$. Зауважимо також, що $\vec{M}_{\text{пр}}\left(\vec{F}_i,\vec{F}_i''\right)=\vec{r}_i\times\vec{F}_i=\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$, тому остаточно матимемо $\left\{\vec{F}_i,\vec{F}_i',\vec{F}_i''\right\}\sim\left\{\vec{F}_i',\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)\right\}$, де силу $\vec{F}_i'$ можна вважати перенесеною в центр O силою $\vec{F}_i$.

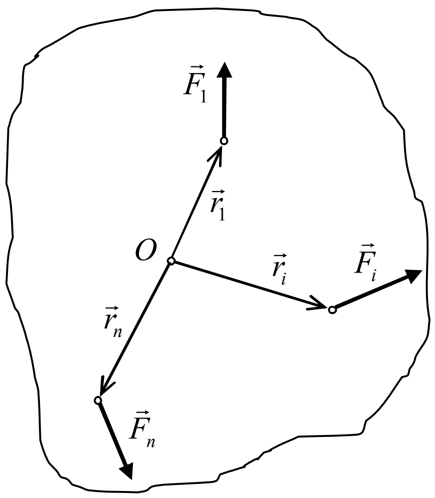

Рис. 3. Система сил, прикладених до твердого тіла

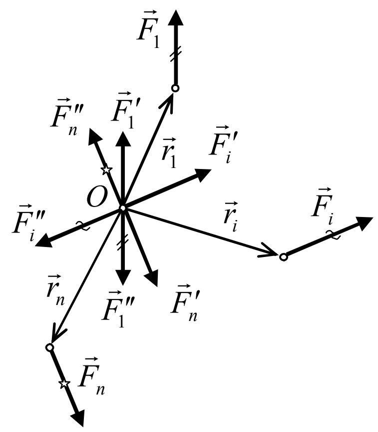

Рис. 4. Створення приєднаних пар сил

Таким чином, у точці O отримано сукупність перенесених в неї сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n}$ (рис. 5) і сукупність моментів $\left\{\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ (рис. 6).

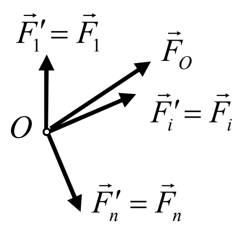

Рис. 5. Сили, перенесені у точку O

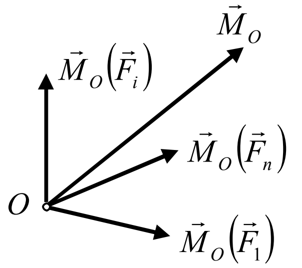

Рис. 6. Моменти приєднаних пар у точці O

Додаючи відповідно ці вектори отримаємо головний вектор

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \tag{9}$$

і головний момент

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = \vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + \vec{M}_O\left(\vec{F}_n\right) \tag{10}$$

вихідної довільної просторової системи сил (обидва ці вектори прикладені у полюсі O), що і треба було довести.

Зауважимо, що якщо дві системи сил мають геометрично рівні головні вектори і головні моменти, тоді такі системи називають *статично еквівалентними*.

2.3. Теорема Сомова (про зведення системи сил до двох сил)

Довільну систему сил, для якої $\mathbf{I}_2 \neq 0$ *(тобто* $\vec{F}_O \not\perp \vec{M}_O$*), можна звести до двох перехресних сил, одна з яких прикладена у центрі зведення.*

Д о в е д е н н я

Нехай маємо довільну систему сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n}$, що прикладені до твердого тіла. Скориставшись основною теоремою статики (теоремою Пуансо) зведемо дану систему сил до головного вектора і головного моменту. Тепер вказаний головний момент подамо у вигляді приєднаної пари сил $\left\{\vec{P}, \vec{P}'\right\}$ з плечем h (див. рис. 7).

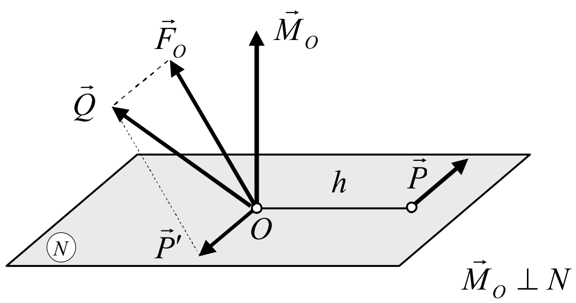

Рис. 7. До теореми Сомова

Тоді $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n} \sim \left\{\vec{F}_O, \vec{P}, \vec{P}'\right\}$. Далі сили $\vec{F}_O$ і $\vec{P}'$ додаємо за правилом паралелограма, отримуючи $\vec{Q} \sim \left\{\vec{F}_O, \vec{P}'\right\}$. В такому разі

$$\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^{n} \sim \left\{\vec{F}_O, \vec{P}, \vec{P}'\right\} \sim \left\{\vec{Q}, \vec{P}\right\},$$

що і треба було довести.

2.4. Залежність головного вектора і головного моменту від вибору центра зведення

Якщо перенести центр зведення у іншу точку (т. O_1 на рис. 8), то головний вектор системи сил для нового центру за побудовою залишиться тим же самим, тобто *головний вектор не залежить від вибору центра зведення*.

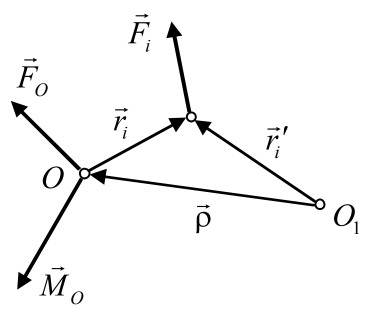

Рис. 8. Перехід до нового центру зведення

Вираз (4) для головного моменту при зміні центра зведення на O_1 набуде вигляду

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i \right), \qquad (11)$$

або, якщо врахувати за рис. 8, що

$$\vec{r}_i' = \overrightarrow{O_1 O} + \vec{r}_i = \vec{\rho} + \vec{r}_i, \qquad (12)$$

отримаємо

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i' \times \vec{F}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\rho} + \vec{r}_i \right) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{\rho} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{M}_O + \vec{\rho} \times \vec{F}_O,$$

звідки маємо

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{\rho} \times \vec{F}_O. \qquad (13)$$

Таким чином доведено, що *при зміні центру зведення головний момент системи сил змінюється на величину, що дорівнює моменту головного вектора, прикладеного у старому центрі зведення, відносно нового центру зведення.*

2.5. Статичні інваріанти (незмінні)

Із наведеного вище випливає, що головний вектор довільної системи сил є інваріантним (незмінним) стосовно вибору центра зведення. Тому головний вектор називають *першим статичним інваріантом* ($\mathbf{I}_1$), тобто $\mathbf{I}_1 = \vec{F}_O$.

Помножимо скалярно ліву і праву частини формули (13) на головний вектор цієї системи:

$$\vec{F}_O \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O + \vec{F}_O \cdot \left(\vec{\rho} \times \vec{F}_O\right),$$

звідки випливає, що

$$\vec{F}_O \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O,$$

оскільки $\vec{F}_O \cdot \left(\vec{\rho} \times \vec{F}_O\right) = 0$ через те, що $\vec{F}_O \perp \vec{\rho} \times \vec{F}_O$.

Таким чином, скалярний добуток головного вектора і головного моменту даної системи сил ($\vec{F}_O \cdot \vec{M}_O$) не залежить від вибору центра зведення і називається *другим статичним інваріантом* ($\mathbf{I}_2$):

$$\mathbf{I}_2 = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O. \tag{14}$$

Тут мова йде про те, що для будь-якої просторової системи сил величина $\mathbf{I}_2$ є сталою. Також сталою і не залежною від вибору центра зведення буде проекція головного моменту на напрямок головного вектора

$$\mathbf{I}_2' = M_O \cos\left(\vec{F}_O \hat{;} \vec{M}_O\right),$$

що випливає з виразу (14), взявши до уваги, що модуль головного вектора є постійним для даної системи сил.

3. ЧАСТИННІ ВИПАДКИ ЗВЕДЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО НАЙПРОСТІШОГО ВИГЛЯДУ

Отже, довільна просторова система сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^n$, прикладених до твердого тіла, зводиться до головного вектора $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}_O$ (центр зведення - точка O), тобто $\left\{\vec{F}_i\right\}_{i=1}^n \sim \left\{\vec{F}, \vec{M}_O\right\}$.

Розглянемо нижче можливі ***частинні випадки*** такого зведення й наведемо відповідні наочні приклади.

1. $\boxed{\vec{F}=\vec{0},\ \vec{M}_O=\vec{0}}$. В цьому разі дана система сил є *зрівноваженою* (еквівалентною нулю) і тіло знаходиться в тому стані, в якому воно знаходилося до початку дії цієї системи сил.

<u>Приклад 1</u>

До вершин кубу прикладені за напрямками ребер однакові за модулем сили, як вказано на рис. 9. Спростити дану систему сил і перевірити, чи знаходиться вона у рівновазі.

***Дано*:** $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = P$, a - довжина ребра куба.

Знайти $\vec{F}$, $\vec{M}_O$, і зробити висновок відносно рівноваги даної системи сил.

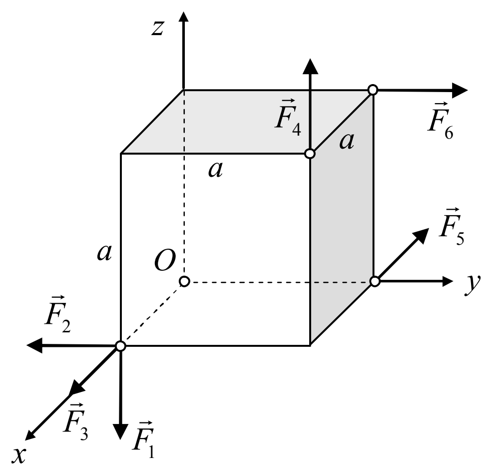

Рис. 9. Система сил, прикладених до твердого тіла

Р о з в' я з а н н я

Знайдемо проекції головного вектора $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}_O$ на осі системи координат $Oxyz$:

$$F_x = \sum F_{ix} = F_3 - F_5 = P - P = 0, \qquad M_{Ox} = \sum M_{xi} = F_4 a - F_6 a = Pa - Pa = 0,$$

$$F_y = \sum F_{iy} = F_6 - F_2 = P - P = 0, \qquad M_{Oy} = \sum M_{yi} = F_1 a - F_4 a = Pa - Pa = 0,$$

$$F_z = \sum F_{iz} = F_4 - F_1 = P - P = 0, \qquad M_{Oz} = \sum M_{zi} = F_5 a - F_2 a = Pa - Pa = 0.$$

Оскільки проекції головного вектора і головного моменту дорівнюють нулю, то це означає, що $\vec{F} = \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$. Отже, дана система сил є *зрівноваженою*.

2. $\boxed{\vec{F} \neq \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}}$. Система сил звелася таким чином до головного вектора $\vec{F}$ (який є *рінодійною* даної системи сил), прикладеного у центрі зведення (т. O).

<u>Приклад 2</u>

До вершин кубу прикладені за напрямками ребер однакові за модулем сили, як вказано на рис. 10. Спростити дану систему сил і перевірити, чи знаходиться вона у рівновазі.

Дано: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = P$, a - довжина ребра куба.

Знайти $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ і зробити висновок відносно рівноваги даної системи сил.

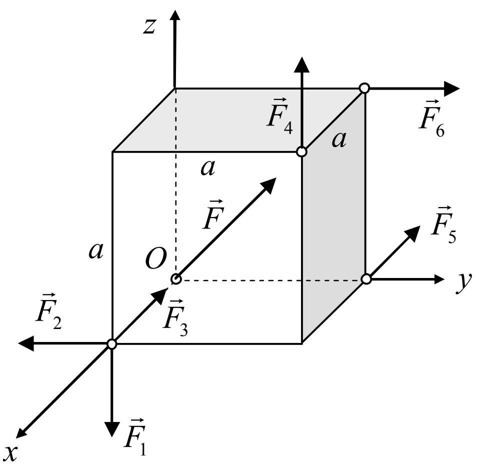

Рис. 10. Система сил, прикладених до твердого тіла

Р о з в'я з а н н я

Знайдемо проекції головного вектора $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}_O$ на осі системи координат $Oxyz$:

$$F_x = \sum F_{ix} = -F_3 - F_5 = -2P \neq 0, \qquad M_{Ox} = \sum M_{xi} = F_4 a - F_6 a = Pa - Pa = 0,$$

$$F_y = \sum F_{iy} = F_6 - F_2 = P - P = 0, \qquad M_{Oy} = \sum M_{yi} = F_1 a - F_4 a = Pa - Pa = 0,$$

$$F_z = \sum F_{iz} = F_4 - F_1 = P - P = 0, \qquad M_{Oz} = \sum M_{zi} = F_5 a - F_2 a = Pa - Pa = 0.$$

В даному разі головний вектор $\vec{F}$ має модуль $2P$ і напрямлений у від'ємному напрямку осі Ox, а головний момент дорівнює нулю ($\vec{M}_O = \vec{0}$). Отже, дана система сил зводиться до *рівнодійної*, що збігається з головним вектором $\vec{F}$, прикладеним у т. O.

3. $\boxed{\vec{F} = \vec{0},\ \vec{M}_O \neq \vec{0}}$. В даному разі головний момент $\vec{M}_O$ не залежить від вибору центра зведення, оскільки при обчисленні його в новому центрі зведення O_1 маємо: $\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{\rho} \times \vec{F} = \vec{M}_O$, тобто в межах твердого тіла він є вільним вектором і повністю збігається із моментом пари сил $\vec{M}$. Отже система сил звелась до *пари сил*.

<u>Приклад 3</u>

До вершин куба, ребра якого мають довжину 5 см, прикладені, як вказано на рис. 11, шість рівних за модулем сил (по 2 Н кожна). Звести цю систему сил до найпростішого вигляду.

Дано: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = P = 2$ Н, $a = 5$ см - довжина ребра куба.

Знайти $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ і зробити висновок щодо зведення цієї системи сил до найпростішого вигляду.

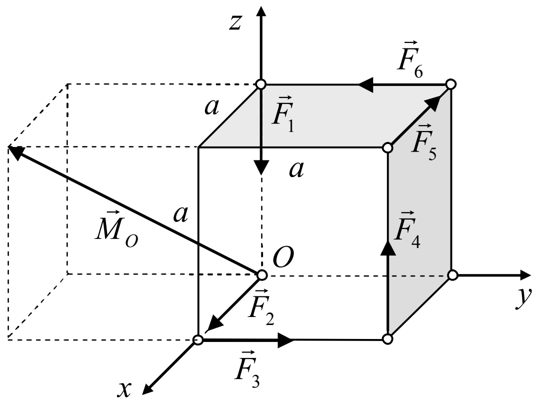

Рис. 11. Система сил, прикладених до твердого тіла

Р о з в' я з а н н я

Знайдемо проекції головного вектора $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}_O$ на осі системи координат $Oxyz$:

$$F_x = \sum F_{ix} = F_2 - F_5 = P - P = 0\,, \qquad M_{Ox} = \sum M_{xi} = F_4 a + F_6 a = 2Pa \neq 0\,,$$

$$F_y = \sum F_{iy} = F_3 - F_6 = P - P = 0\,, \qquad M_{Oy} = \sum M_{yi} = -F_4 a - F_5 a = -2Pa \neq 0\,,$$

$$F_z = \sum F_{iz} = F_4 - F_1 = P - P = 0\,, \qquad M_{Oz} = \sum M_{zi} = F_3 a + F_5 a = 2Pa \neq 0\,.$$

Оскільки проекції головного вектора дорівнюють нулю, то це означає, що $\vec{F} = \vec{0}$. Модуль головного моменту дорівнює:

$$\boxed{M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{(2Pa)^2 + (-2Pa)^2 + (2Pa)^2} = 2\sqrt{3}Pa = 20\sqrt{3}\ \text{Н}\cdot\text{см}},$$

а його напрямні косинуси визначаються за формулами

$$\cos\alpha = \cos\left(\vec{M}_O; Ox\right) = \frac{M_{Ox}}{M_O} = \frac{2Pa}{2\sqrt{3}Pa} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,,$$

$$\cos\beta = \cos\left(\vec{M}_O; Oy\right) = \frac{M_{Oy}}{M_O} = \frac{-2Pa}{2\sqrt{3}Pa} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,,$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\vec{M}_O; Oz\right) = \frac{M_{Oz}}{M_O} = \frac{2Pa}{2\sqrt{3}Pa} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Отже, дана система сил зводиться до *пари сил*, момент якої дорівнює $20\sqrt{3}$ Н$\cdot$см і утворює із осями координат кути α, β і γ, які визначаються наступними напрямними косинусами:

$$\boxed{\cos\alpha = -\cos\beta = \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

4. $\boxed{\vec{F} \neq \vec{0},\ \vec{M}_O \neq \vec{0}}$, але другий статичний інваріант $\boxed{\mathbf{I}_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O = 0}$ (тобто кут між векторами $\vec{F}$ і $\vec{M}_O$ є прямим). Тоді замінюємо головний момент $\vec{M}_O$ приєднаною парою сил $\left\{\vec{F}',\ \vec{F}''\right\}$, таким чином вибираючи плече пари $h = \dfrac{M_O}{F}$, щоб $F' = F'' = F$ (див. рис. 12).

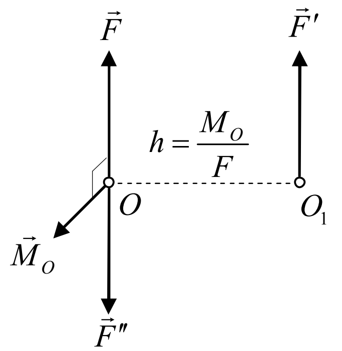

Рис. 12. Зведення до рівнодійної у разі $\mathbf{I}_2 = 0$

Таким чином у т. O отримана зрівноважена система сил $\left\{\vec{F},\ \vec{F}''\right\}$, яку можна відкинути. Залишається сила $\vec{F}'$, прикладена у т. O_1 на відстані h від т. O, яка дорівнює вихідному головному вектору $\vec{F}$ за величиною і напрямком. Оскільки вихідна система сил звелася до сили $\vec{F}'$, прикладеній у т. O_1, то ця сила є *рівнодійною* для неї.

Приклад 4

До чотирьох вершин кубу (A, H, B і D) прикладені чотири рівних за модулем сили: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = P$, причому сила $\vec{F}_1$ напрямлена по AC, $\vec{F}_2$ - по HK, $\vec{F}_3$ - по BE і $\vec{F}_4$ - по DG (рис. 13).

Звести цю систему сил до найпростішого вигляду.

Дано: $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = P$, a - довжина ребра куба.

Знайти $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ і зробити висновок відносно рівноваги даної системи сил.

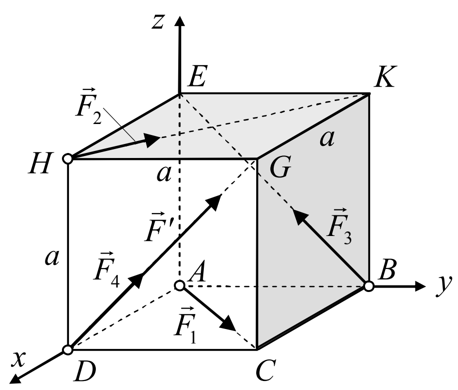

Рис. 13. Система сил, прикладених до твердого тіла

Розв'язання

Зведемо дану систему сил до т. A. Оскільки в даній системі сил всі сили напрямлені по діагоналям граней куба, то кути, що утворюються векторами сил із осями системи координат $Axyz$ дорівнюють $\alpha = 45^\circ$. Знайдемо проекції головного вектора $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}_A$ на осі цієї системи координат $Axyz$:

$$F_x = \sum F_{ix} = F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\alpha = 0,$$

$$F_y = \sum F_{iy} = F_1 \cos\alpha - F_3 \cos\alpha + F_4 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha = 2P\cos\alpha,$$

$$F_z = \sum F_{iz} = F_3 \cos\alpha + F_4 \cos\alpha = 2P\cos\alpha$$

$$M_{Ax} = \sum M_{xi} = -F_2 a \cos\alpha + F_3 a \cos\alpha = 0,$$

$$M_{Ay} = \sum M_{yi} = -F_4 a \cos\alpha - F_2 a \cos\alpha = -2Pa\cos\alpha,$$

,
$$M_{Az} = \sum M_{zi} = F_4 a\cos\alpha + F_2 a\cos\alpha = \\ = 2Pa\cos\alpha.$$

Знайдемо модулі головного вектора $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}_A$:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{4P^2\cos^2\alpha + 4P^2\cos^2\alpha} = 2P\cos\alpha\cdot\sqrt{2} = 2P \neq 0.$$

$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = 2Pa\cos\alpha\cdot\sqrt{2} = 2Pa.$$

Зауважимо, що головний вектор $\vec{F}$ буде напрямленим від т. A до т. K, оскільки його проекції на осі Ay і Az однакові, а $F_x = 0$.

Перевіримо, чи є справедливим вираз $\mathbf{I}_2 = 0$:

$$\mathbf{I}_2 = \vec{F}\cdot\vec{M}_A = F_x\cdot M_{Ax} + F_y\cdot M_{Ay} + F_z\cdot M_{Az} = 0\cdot 0 - 2P\cos\alpha\cdot 2P\cos\alpha + 2P\cos\alpha\cdot 2P\cos\alpha = 0.$$

Отже $\vec{F}\perp\vec{M}_A$ і дана система сил зводиться до *рівнодійної*, яка має той же модуль і напрямок, що і головний вектор $\vec{F}$, але прикладена у точці, яка віддалена від т. A на відстань $h = \dfrac{M_A}{F} = \dfrac{2Pa}{2P} = a$, тобто збігається із т. D (в цьому випадку напрямок моменту рівнодійної відносно центра зведення A збігається із напрямком головного моменту $\vec{M}_A$). Оскільки головний вектор напрямлений від т. A до т. K, то рівнодійна буде напрямлена від т. D до т. G, тобто по лінії DG.

Дійсно, рівняння лінії дії рівнодійної має вигляд

$$\frac{M_{Ax} - yF_z + zF_y}{F_x} = \frac{M_{Ay} - zF_x + xF_z}{F_y} = \frac{M_{Az} - xF_y + yF_x}{F_z},$$

або, з урахуванням знайдених вище проекцій отримаємо

$$\frac{0 - y\cdot 2P\cos\alpha + z\cdot 2P\cos\alpha}{0} = \frac{-2Pa\cos\alpha - z\cdot 0 + x\cdot 2P\cos\alpha}{2P\cos\alpha} = \frac{2Pa\cos\alpha - x\cdot 2P\cos\alpha + y\cdot 0}{2P\cos\alpha},$$

звідки випливає, що $z - y = 0$, або $\boxed{z = y}$ - рівняння площини, що проходить через $AKGD$, і $x - a = a - x$, або $\boxed{x = a}$ - рівняння площини, паралельної до Ayz, що проходить через т. D.

Таким чином, лінією дії рівнодійної є діагональ DG - лінія перетину вказаних вище площин.

5. $\boxed{\vec{F} \neq \vec{0},\ \vec{M}_O \neq \vec{0}}$, а $\boxed{\mathbf{I}_2 = \vec{F} \cdot \vec{M}_O \neq 0}$. В цьому загальному випадку система сил зводиться до так званого *динамічного гвинта* (*динами*): сукупності головного вектора $\vec{F}$ і пари сил з моментом $\vec{M}$ (моментом динами), напрямленим по лінії дії головного вектора $\vec{F}$ - *центральній гвинтовій осі*, рівняння якої має вигляд

$$\frac{M_{Ox} - yF_z + zF_y}{F_x} = \frac{M_{Oy} - zF_x + xF_z}{F_y} = \frac{M_{Oz} - xF_y + yF_x}{F_z}.$$

Взагалі, для центрів зведення, розташованих на центральній гвинтовій осі, головний момент динами $\vec{M}$ лежить на цій осі. Проекцію головного моменту $\vec{M}_O$ на центральну гвинтову вісь (мінімальний момент) визначають за формулою

$$M_{\min} = Пр._{\vec{F}} \vec{M}_O = \frac{\mathbf{I}_2}{F} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{M}_O}{F}.$$

<u>Приклад 5</u>

Систему сил: $P_1 = 8$ Н, напрямлену вздовж осі Oz, і $P_2 = 12$ Н, напрямлену паралельно до Oy, як вказано на рис. 14, де $OA = 1{,}3$ м, звести до канонічного вигляду, визначивши величину головного вектора $\vec{F}$ всіх цих сил і величину їх головного моменту $\vec{M}_K$ відносно довільної точки, взятої на центральній гвинтовій осі. Знайти кути α, β і γ, що складаються центральною гвинтовою віссю із осями координат, а також координати x і y точки зустрічі її з площиною Oxy.

Дано: $P_1 = 8$ Н, $P_2 = 12$ Н, $OA = 1{,}3$ м.

Знайти $\vec{F}$, $\vec{M}_K$, α, β, γ.

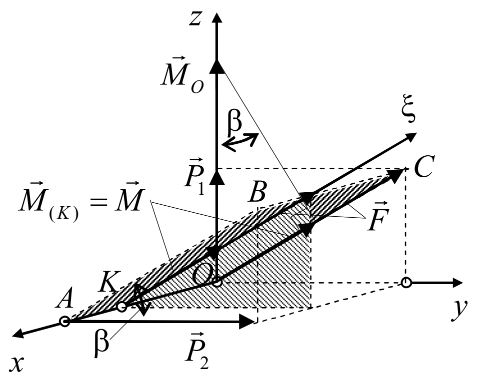

Рис. 14. Система сил, прикладених до твердого тіла

Р о з в' я з а н н я

Знайдемо проекції головного вектора $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}_O$ даної системи сил $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2\}$ на осі системи координат $Oxyz$, вибираючи за центр зведення т. O:

$$F_x = \sum F_{ix} \equiv 0, \quad M_{Ox} = \sum M_{xi} \equiv 0,$$

$$F_y = \sum F_{iy} = P_2, \quad M_{Oy} = \sum M_{yi} \equiv 0,$$

$$F_z = \sum F_{iz} = P_1; \quad M_{Oz} = \sum M_{zi} = P_2 \cdot OA.$$

Тоді маємо наступні модулі вказаних векторів:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{P_2^2 + P_1^2} = \sqrt{144\ \text{Н}^2 + 64\ \text{Н}^2} = 14{,}4\ \text{Н}.$$

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = M_{Oz} = P_2 \cdot OA = 12\ \text{Н} \cdot 1{,}3\ \text{м} = 15{,}6\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Оскільки $\mathbf{I}_2 = P_1 \cdot P_2 \cdot OA = 8\ \text{Н} \cdot 12\ \text{Н} \cdot 1{,}3\ \text{м} = 124{,}8\ \text{Н}^2\text{м} \neq 0$, то система зводиться до *динами*.

Знайдемо далі рівняння центральної гвинтової осі:

$$\frac{M_{Ox} - yF_z + zF_y}{F_x} = \frac{M_{Oy} - zF_x + xF_z}{F_y} = \frac{M_{Oz} - xF_y + yF_x}{F_z},$$

або

$$\frac{0 - y \cdot P_1 + z \cdot P_2}{0} = \frac{0 - z \cdot 0 + x \cdot P_1}{P_2} = \frac{P_2 \cdot OA - x \cdot P_2 + y \cdot 0}{P_1},$$

звідки маємо $-yP_1P_2 + zP_2^2 = 0$, або $y = \dfrac{P_2}{P_1} z$,

що дає вираз $\boxed{z = \dfrac{P_1}{P_2} y}$ - для площини $OABC$ на рис. 14; а також

$$xP_1^2 = P_2^2 OA - xP_2^2,$$

звідки отримаємо

$$x\left(P_1^2+P_2^2\right)=P_2^2\cdot OA\text{, або } x=\frac{P_2^2\cdot OA}{P_1^2+P_2^2}=\frac{OA}{1+\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2}=\frac{1{,}3\text{ м}}{1+\left(\frac{8\text{ Н}}{12\text{ Н}}\right)^2}=0{,}9\text{ м}=OK\,.$$

Отже маємо $\boxed{x=OK}$ - заштрихована площина на рис. 14. Перетин вказаних площин дає центральну гвинтову вісь ($K\xi$). Якщо вибрати за центр зведення т. K на цій осі, то будемо мати (враховуючи, що $x_K=OK=0{,}9$ м, $y_K=0$, $\text{tg}\beta=\frac{P_1}{P_2}=\frac{8\text{ Н}}{12\text{ Н}}=\frac{2}{3}$, $\sin\beta=\frac{\text{tg}\beta}{\sqrt{1+\text{tg}^2\beta}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=0{,}5547$):

$$M_{(K)}=M_{\min}=M_O\cos\left(90^\circ-\beta\right)=M_O\sin\beta=15{,}6\text{ Н}\cdot\text{м}\cdot0{,}5547\text{=}8{,}65\text{ Н}\cdot\text{м}\,,$$

тому для кутів, які утворює центральна гвинтова вісь з осями системи координат $Oxyz$, отримаємо наступні вирази

$$\alpha=\angle(\xi,\,x)=90^\circ,\ \beta=\angle(\xi,\,y)=\text{arctg}\left(\frac{2}{3}\right),\ \gamma=\angle(\xi,\,z)=\text{arctg}\left(\frac{3}{2}\right),$$

оскільки $\text{tg}\gamma=\frac{P_2}{P_1}=\frac{12\text{ Н}}{8\text{ Н}}=\frac{3}{2}$.

4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КОМП'ЮТЕРА

Із наведеного вище випливає наступна послідовність зведення довільної просторової системи сил до найпростішого вигляду і аналізу результатів.

1. Визначити проекції головного вектора $\vec{F}$ і головного моменту $\vec{M}_O$ даної системи сил на осі вибраної системи координат.
2. Підрахувати другий статичний інваріант

   $\mathbf{I}_2=\vec{F}\cdot\vec{M}_O=F_xM_{Ox}+F_yM_{Oy}+F_zM_{Oz}$.

3. Скористатися схемою рис. 15 і визначити за нею, до чого зводиться дана система сил.
4. Знайти шукані величини.

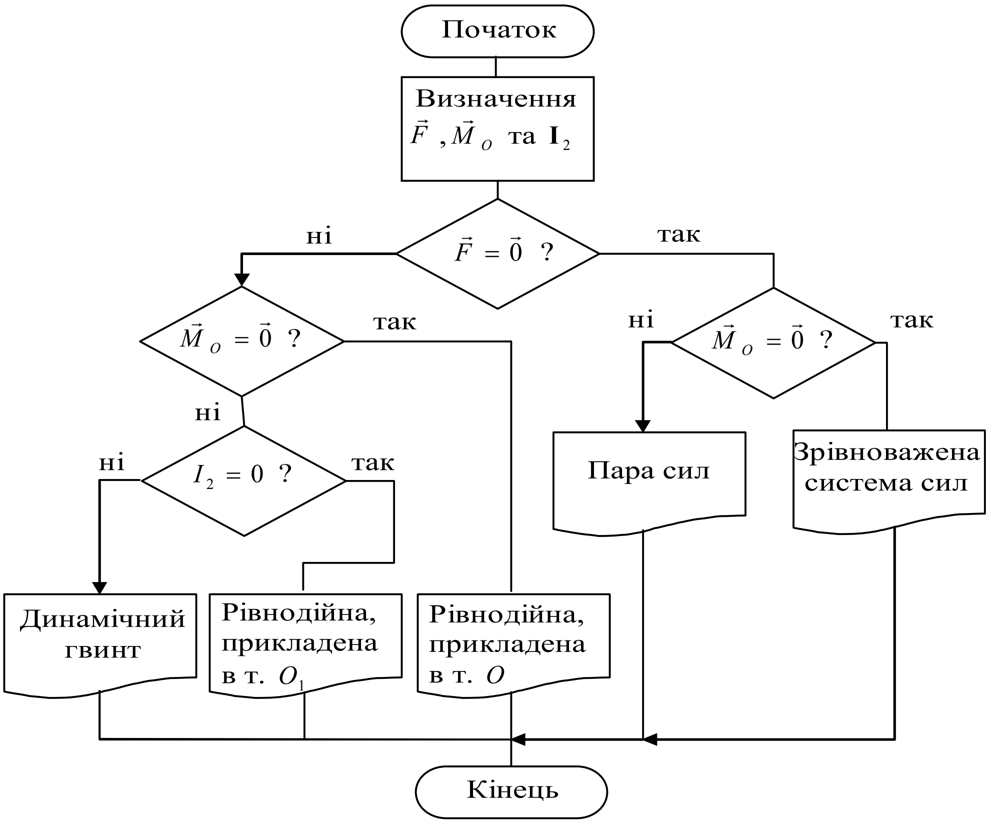

Рис. 15. Блок-схема алгоритму зведення системи сил до найпростішого вигляду

Ця методика застосовується для розв'язання прикладів, наведених у попередньому пункті, за допомогою програми, написаної на мові пакету «Mathematica» за алгоритмом рис. 15.

<u>Приклад 1</u>

1) Задаємо необхідні геометричні розміри: В ДАНОМУ ПРИКЛАДІ ВІДСУТНІ
2) Обчислюємо тригонометричні функції кутів, що утворюються елементами схеми: В ДАНОМУ ПРИКЛАДІ ВІДСУТНІ
3) Задаємо координати центра зведення

```
czved={0,0,0};
```

4) Вказуємо кількість сил, прикладених до тіла

```
fNumb=6;
```
5) Для кожної сили задаємо: координати центра зведення, координати точки прикладення сили і проекції сили

```
F1={czved,{a,0,0},{0,0,-P}}
{{0,0,0},{a,0,0},{0,0,-P}}
F2={czved,{a,0,0},{0,-P,0}}
{{0,0,0},{a,0,0},{0,-P,0}}
F3={czved,{a,0,0},{P,0,0}}
{{0,0,0},{a,0,0},{P,0,0}}
F4={czved,{a,a,a},{0,0,P}}
{{0,0,0},{a,a,a},{0,0,P}}
F5={czved,{0,a,0},{-P,0,0}}
{{0,0,0},{0,a,0},{-P,0,0}}
F6={czved,{0,a,a},{0,P,0}}
{{0,0,0},{0,a,a},{0,P,0}}
```
6) Складаємо систему сил

```
FList={F1,F2,F3,F4,F5,F6}
{{{0,0,0},{a,0,0},{0,0,-P}},{{0,0,0},{a,0,0},{0,-
P,0}},
{{0,0,0},{a,0,0},{P,0,0}},{{0,0,0},{a,a,a},{0,0,P}},
{{0,0,0},{0,a,0},{-P,0,0}},{{0,0,0},{0,a,a},{0,P,0}}}
```
7) Знаходимо головний вектор системи сил

```
F=Sum[FList[[i,3]],{i,fNumb}]
{0,0,0}
```
8) Встановлюємо правило обчислення моменту сили відносно центра зведення

```
MomentRule={{a_,b_,c_},{d_,e_,f_},{g_,h_,k_}}:>
{(e-b) k-(f-c) h,(f-c) g-(d-a) k,(d-a) h-(e-b) g};
```
9) Обчислюємо головний момент системи сил

```
M=Sum[FList[[i]]/.MomentRule,{i,fNumb}]
{0,0,0}
```
10) Модуль головного вектора дорівнює

```
ValF=Sqrt[F.F]
0
```
11) Модуль головного моменту складає

```
ValM=Sqrt[M.M]
0
```
12) Обчислюємо другий статичний інваріант

```
I2=F . M
0
```
13) З'ясовуємо, до чого зводиться дана система сил

```
Print["Система сил зводиться до"];
If[ValF==0,If[ValM==0,Print["зрівноваженої системи сил"],Print["пари сил"]],
 If[ValM==0,Print["рівнодійної, прикладеної в т.O"],
  If[I2==0,Print["рівнодійної, прикладеної в т.O1"],
   Print["динамічного гвинта"]]]]
```

```
Система сил зводиться до
зрівноваженої системи сил
```

Приклад 2

1) Задаємо необхідні геометричні розміри: В ДАНОМУ ПРИКЛАДІ ВІДСУТНІ

2) Обчислюємо тригонометричні функції кутів, що утворюються елементами схеми: В ДАНОМУ ПРИКЛАДІ ВІДСУТНІ

3) Задаємо координати центра зведення

```
czved={0,0,0};
```

4) Вказуємо кількість сил, прикладених до тіла

```
fNumb=6;
```

5) Для кожної сили задаємо: координати центра зведення, координати точки прикладення сили і проекції сили

```
F1={czved,{a,0,0},{0,0,-P}}
{{0,0,0},{a,0,0},{0,0,-P}}
F2={czved,{a,0,0},{0,-P,0}}
{{0,0,0},{a,0,0},{0,-P,0}}
F3={czved,{a,0,0},{-P,0,0}}
{{0,0,0},{a,0,0},{-P,0,0}}
F4={czved,{a,a,a},{0,0,P}}
{{0,0,0},{a,a,a},{0,0,P}}
F5={czved,{0,a,0},{-P,0,0}}
{{0,0,0},{0,a,0},{-P,0,0}}
F6={czved,{0,a,a},{0,P,0}}
{{0,0,0},{0,a,a},{0,P,0}}
```

6) Складаємо систему сил

```
FList={F1,F2,F3,F4,F5,F6}
{{{0,0,0},{a,0,0},{0,0,-
P}},{{0,0,0},{a,0,0},{0,P,0}},
{{0,0,0},{a,0,0},{P,0,0}},{{0,0,0},{a,a,a},{0,0,P}},
{{0,0,0},{0,a,0},{-P,0,0}},{{0,0,0},{0,a,a},{0,P,0}}}
```

7) Знаходимо головний вектор системи сил

```
F=Sum[FList[[i,3]],{i,fNumb}]
{-2 P,0,0}
```

8) Встановлюємо правило обчислення моменту сили відносно центра зведення

```
MomentRule={{a_,b_,c_},{d_,e_,f_},{g_,h_,k_}}:→
{(e-b) k-(f-c) h,(f-c) g-(d-a) k,(d-a) h-(e-b) g};
```

9) Обчислюємо головний момент системи сил

```
M=Sum[FList[[i]]/.MomentRule,{i,fNumb}]
{0,0,0}
```

10) Модуль головного вектора дорівнює

```
ValF=Simplify[Sqrt[F.F],P>0]
2 P
```

11) Модуль головного моменту складає

```
ValM=Simplify[Sqrt[M.M],P>0]
0
```

12) Обчислюємо другий статичний інваріант

```
I2=F . M
0
```

13) З'ясовуємо, до чого зводиться дана система сил

```
Print["Система сил зводиться до"];
If[ValF== 0, If[ValM== 0, Print["зрівноваженої системи сил"], Print["пари сил"]],
 If[ValM== 0, Print["рівнодійної, прикладеної в т.O"],
  If[I2== 0, Print["рівнодійної, прикладеної в т.O1"],
   Print["динамічного гвинта"]]]]
Система сил зводиться до
If[2 P== 0, If[ValM== 0, Print[зрівноваженої системи сил], Print[пари сил]],
 If[ValM== 0, Print[рівнодійної, прикладеної в т.O],
  If[I2== 0, Print[рівнодійної, прикладеної в т.O1], Print[динамічного гвинта]]]]
Simplify[%,P>0]
рівнодійної, прикладеної в т.O
```

Приклад 3

1) Задаємо необхідні вихідні величини:

```
a=5;P=2;
```

2) Обчислюємо тригонометричні функції кутів, що утворюються елементами схеми: В ДАНОМУ ПРИКЛАДІ ВІДСУТНІ

3) Задаємо координати центра зведення

```
czved={0,0,0};
```

4) Вказуємо кількість сил, прикладених до тіла

```
fNumb=6;
```

5) Для кожної сили задаємо: координати центра зведення, координати точки прикладення сили і проекції сили

```
F1={czved,{0,0,a},{0,0,-P}}
{{0,0,0},{0,0,5},{0,0,-2}}
F2={czved,{0,0,0},{P,0,0}}
{{0,0,0},{0,0,0},{2,0,0}}
F3={czved,{a,0,0},{0,P,0}}
{{0,0,0},{5,0,0},{0,2,0}}
F4={czved,{a,a,0},{0,0,P}}
{{0,0,0},{5,5,0},{0,0,2}}
F5={czved,{a,a,a},{-P,0,0}}
{{0,0,0},{5,5,5},{-2,0,0}}
F6={czved,{0,a,a},{0,-P,0}}
{{0,0,0},{0,5,5},{0,-2,0}}
```

6) Складаємо систему сил

```
FList={F1,F2,F3,F4,F5,F6}
{{{0,0,0},{0,0,5},{0,0,2}},{{0,0,0},{0,0,0},{2,0,0}},
{{0,0,0},{5,0,0},{0,2,0}},{{0,0,0},{5,5,0},{0,0,2}},
{{0,0,0},{5,5,5},{-2,0,0}},{{0,0,0},{0,5,5},{0,-
2,0}}}
```

7) Знаходимо головний вектор системи сил

```
F=Sum[FList[[i,3]],{i,fNumb}]
{0,0,0}
```

8) Встановлюємо правило обчислення моменту сили відносно центра зведення

```
MomentRule={{a_,b_,c_},{d_,e_,f_},{g_,h_,k_}}⧴
{(e-b) k-(f-c) h,(f-c) g-(d-a) k,(d-a) h-(e-b) g};
```

9) Обчислюємо головний момент системи сил

```
M=Sum[FList[[i]]/.MomentRule,{i,fNumb}]
{20,-20,20}
```

10) Модуль головного вектора дорівнює

```
ValF=Simplify[Sqrt[F.F],P>0]
0
```

11) Модуль головного моменту складає

```
ValM=Simplify[Sqrt[M.M],P>0]
```

$20\sqrt{3}$

12) Обчислюємо другий статичний інваріант

```
I2=F . M
0
```

13) З'ясовуємо, до чого зводиться дана система сил

```
Print["Система сил зводиться до"];
If[ValF == 0, If[ValM == 0, Print["зрівноваженої системи сил"], Print["пари сил"]],
 If[ValM == 0, Print["рівнодійної, прикладеної в т.O"],
  If[I2 == 0, Print["рівнодійної, прикладеної в т.O1"],
   Print["динамічного гвинта"]]]]
```

```
Система сил зводиться до
пари сил
```

Приклад 4

1) Задаємо необхідні вихідні величини: В ДАНОМУ ПРИКЛАДІ ВІДСУТНІ

2) Обчислюємо тригонометричні функції кутів, що утворюються елементами схеми

$$tg\alpha = Tan[Pi/4]; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(tg\alpha)^2}}; \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+(tg\alpha)^2}};$$

3) Задаємо координати центра зведення

czved={0,0,0};

4) Вказуємо кількість сил, прикладених до тіла

fNumb=4;

5) Для кожної сили задаємо: координати центра зведення, координати точки прикладення сили і проекції сили

F1={czved,{0,0,0},{P cosα,P sinα,0}}

$$\left\{\{0,0,0\},\{0,0,0\},\left\{\frac{P}{\sqrt{2}},\frac{P}{\sqrt{2}},0\right\}\right\}$$

F2={czved,{a,0,a},{-P cosα,P sinα,0}}

$$\left\{\{0,0,0\},\{a,0,a\},\left\{-\frac{P}{\sqrt{2}},\frac{P}{\sqrt{2}},0\right\}\right\}$$

F3={czved,{0,a,0},{0,-P cosα,P sinα}}

$$\left\{\{0,0,0\},\{0,a,0\},\left\{0,-\frac{P}{\sqrt{2}},\frac{P}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

F4={czved,{a,0,0},{0,P cosα,P sinα}}

$$\left\{\{0,0,0\},\{a,0,0\},\left\{0,\frac{P}{\sqrt{2}},\frac{P}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

6) Складаємо систему сил

FList={F1,F2,F3,F4,F5,F6}

$$\left\{\left\{\{0,0,0\},\{0,0,0\},\left\{\frac{P}{\sqrt{2}},\frac{P}{\sqrt{2}},0\right\}\right\},\right.$$
$$\left\{\{0,0,0\},\{a,0,a\},\left\{-\frac{P}{\sqrt{2}},\frac{P}{\sqrt{2}},0\right\}\right\},\left\{\{0,0,0\},\{0,a,0\},\left\{0,-\frac{P}{\sqrt{2}},\frac{P}{\sqrt{2}}\right\}\right\},$$
$$\left.\left\{\{0,0,0\},\{a,0,0\},\left\{0,\frac{P}{\sqrt{2}},\frac{P}{\sqrt{2}}\right\}\right\},F5,F6\right\}$$

7) Знаходимо головний вектор системи сил

```
F=Sum[FList[[i,3]],{i,fNumb}]
```

$$\left\{0,\frac{2P}{\sqrt{2}},\frac{2P}{\sqrt{2}}\right\}$$

8) Встановлюємо правило обчислення моменту сили відносно центра зведення

```
MomentRule={{a_,b_,c_},{d_,e_,f_},{g_,h_,k_}}:→
{(e-b) k-(f-c) h,(f-c) g-(d-a) k,(d-a) h-(e-b) g};
```

9) Обчислюємо головний момент системи сил

```
M=Sum[FList[[i]]/.MomentRule,{i,fNumb}]
```

$$\left\{0,-\frac{2aP}{\sqrt{2}},\frac{2aP}{\sqrt{2}}\right\}$$

10) Модуль головного вектора дорівнює

```
ValF=Simplify[Sqrt[F.F],P>0]
2 P
```

11) Модуль головного моменту складає

```
ValM=Simplify[Sqrt[M.M],P>0&&a>0]
2 a P
```

12) Обчислюємо другий статичний інваріант

```
I2=F . M
0
```

13) З'ясовуємо, до чого зводиться дана система сил

```
Print["Система сил зводиться до"];
If[ValF==0,If[ValM==0,Print["зрівноваженої системи сил"],Print["пари сил"]],
 If[ValM==0,Print["рівнодійної, прикладеної в т.O"],
  If[I2==0,Print["рівнодійної, прикладеної в т.O1"],
   Print["динамічного гвинта"]]]]
 Система сил зводиться до
If[2P==0,If[ValM==0,Print[зрівноваженої системи сил],Print[пари сил]],
 If[ValM==0,Print[рівнодійної, прикладеної в т.O],
  If[I2==0,Print[рівнодійної, прикладеної в т.O1],Print[динамічного гвинта]]]]
 Simplify[%,P>0&&a>0]
рівнодійної, прикладеної в т. O1
```

Приклад 5

1) Задаємо необхідні вихідні величини:

a=1.3; P1=8; P2=12;

2) Обчислюємо тригонометричні функції кутів, що утворюються елементами схеми: В ДАНОМУ ПРИКЛАДІ ВІДСУТНІ

3) Задаємо координати центра зведення

czved={0,0,0};

4) Вказуємо кількість сил, прикладених до тіла

fNumb=2;

5) Для кожної сили задаємо: координати центра зведення, координати точки прикладення сили і проекції сили

```
F1={czved,{0,0,0},{0,0,P1}}
{{0,0,0},{0,0,0},{0,0,8}}
F2={czved,{a,0,0},{0,P2,0}}
{{0,0,0},{1.3,0,0},{0,12,0}}
```

6) Складаємо систему сил

```
FList={F1,F2}

{{{0,0,0},{0,0,0},{0,0,8}},{{0,0,0},{1.3,0,0},{0,12,0
}}}
```

7) Знаходимо головний вектор системи сил

```
F=Sum[FList[[i,3]],{i,fNumb}]
{0,12,8}
```

8) Встановлюємо правило обчислення моменту сили відносно центра зведення

```
MomentRule={{a_,b_,c_},{d_,e_,f_},{g_,h_,k_}}:→
{(e-b) k-(f-c) h,(f-c) g-(d-a) k,(d-a) h-(e-b) g};
```

9) Обчислюємо головний момент системи сил

```
M=Sum[FList[[i]]/.MomentRule,{i,fNumb}]
{0,0,15.6}
```

10) Модуль головного вектора дорівнює

ValF=Sqrt[F.F]

$4\sqrt{13}$

11) Модуль головного моменту складає

```
ValM=Sqrt[M.M]
15.6
```

12) Обчислюємо другий статичний інваріант

```
I2=F . M
124.8
```

13) З'ясовуємо, до чого зводиться дана система сил

Print["Система сил зводиться до"];

```
If [ValF==0,If[ValM==0,Print["зрівноваженої системи сил"],
Print["пари сил"]],

 If[ValM==0,Print["рівнодійної, прикладеної в т. O"],
  If[I2==0,Print["рівнодійної, прикладеної в т. O1"],
   Print["динамічного гвинта"]]]]
```

Система сил зводиться до динамічного гвинта

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Використана література

1. *Мещерский И. В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1980. – 446 с.
2. *Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.* Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. – М.: Наука, 1971-1973. – Т. 1. – 512 с.; Т. 2. – 624 с.; Т. 3. – 487 с.

Рекомендована література

3. *Павловський М. А.* Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
4. *Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф.* Теоретическая механика. Статика. Кинематика. – К.: Вища шк., 1989. – 351 с.
5. *Яблонский А. А. и др.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. - М.: Высш. шк., 1985. - 367 с.
6. *Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики.

   - М.: Наука. Т.1-2, 1979.
7. *Кильчевский Н. А., Ремизова Н. И., Кильчевская Е. Н.* Основы теоретической механики. – К.: Вища школа, 1986. – 296 с.
8. *Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М.* Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1968.- 436 с.

9. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н.* Методика розв’язування задач з теоретичної механіки. -К.: Радянська школа, 1955.- 368 с.

10. *Березова О.А., Друшляк Г.Ю, Солодовников Р.В.* Теоретическая механика. Сб. задач.- К.: Вища шк. Головное изд-во, 1980.- 324 с.

11. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з курсу теоретичної механіки із використанням ЕОМ для студентів всіх спеціальностей. Розділ "Статика" / Укладачі: *М.А. Павловський*, *О.С. Апостолюк, О.М. Юдін, С.Я. Свистунов*. - Київ : КПІ, 1985. - 24 с.